Über die Funktoren $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ und $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Helmut Lenzing

aus Beuthen

1965

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

Über die Funktoren $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ und $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Helmut Lenzing

aus Beuthen

1. Referent: Prof. Dr. K. P. Grotemeyer

2. Referent: Prof. Dr. A. Stöhr

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Dezember 1964

Tag der Promotion: 27. Feb. 1965

INHALTSVERZEICHNIS

§1. Einleitung 1

§2. Ergänzende Bemerkungen über Kategorien und Funktoren. 5

§3. Die Kategorie der A-Linksobjekte einer abelschen Kategorie 14

§4. Der Funktor $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ in abelschen Kategorien. . . 16

§4'. Der Funktor $\mathrm{Hom}(\cdot,E)$ in abelschen Kategorien. . . 20

§5. Der Funktor $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ in noetherschen, erblichen Kategorien 21

§6. Charakterisierungen der noetherschen, erblichen Kategorien 22

§5'. Der Funktor $\mathrm{Ext}^1(E,\cdot)$ für links-perfekte, rechts-semierbliche Ringe. 27

§7. Tensorprodukte in abelschen Kategorien 29

§8. Der Funktor $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$ für rechts-semierbliche Ringe 35

§9. Charakterisierungen der rechts-semierblichen Ringe 39

Literatur 44

§1. Einleitung

EILENBERG [12] und WATTS [25] haben für Kategorien von Moduln die Funktoren $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$, $\mathrm{Hom}(\cdot,E)$ und $\cdot \otimes E$ durch ihre Exaktheitseigenschaften und ihr Vertauschbarkeitsverhalten gegenüber direkten Produkten und direkten Summen charakterisiert. Diese Sätze werden hier zunächst auf geeignete abelsche Kategorien verallgemeinert (Theorem 4.1, Theorem 4.1', Theorem 7.2). Ähnliche Verallgemeinerungen von MITCHELL sind in ([22], S. 393) angekündigt. Meines Wissens ist diese Arbeit jedoch bisher nicht erschienen. Ferner findet sich Theorem 7.2 (Charakterisierung des Funktors $\cdot \otimes E$) schon bei DOLD [11]. Es erschien jedoch zweckmäßig, die bisher nur unvollständig veröffentlichte Theorie des Tensorproduktes in abelschen Kategorien (s. DOLD und PUPPE [10], S. 226) noch einmal kurz darzustellen (§7).

Dazu sei daran erinnert, daß für einen Ring A ein A-Linksobjekt einer abelschen Kategorie C aus einem C-Objekt E und einem Ringhomomorphismus $A \longrightarrow \mathrm{End}_C(E)$ besteht. Die A-Linksobjekte von C bilden eine abelsche Kategorie ${}_AC$ (§3). Falls es in C beliebige direkte Summen gibt, dann ist der Funktor $\otimes_A : M_A \times {}_AC \longrightarrow C$ definiert (M_A ist die Kategorie der A-Rechtsmoduln, analog wird mit ${}_AM$ die Kategorie der A-Linksmoduln bezeichnet). Dieser Funktor besitzt die bekannten Eigenschaften des gewöhnlichen Tensorproduktes von Moduln. Er ist jedoch nicht balanciert (Beispiel 7.1).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine den Sätzen von EILENBERG und WATTS analoge Charakterisierung der Funktoren $\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E)$ und $\mathrm{Tor}^A_1(\cdot,E)$. Es zeigt sich, daß dies für geeignete abelsche Kategorien C bzw. für geeignete Ringe A möglich ist. Wir erhalten diese Resultate durch Satellitenbildung aus den Sätzen von EILENBERG und WATTS. Bevor wir diese Ergebnisse jedoch formulieren, sei noch auf einige Definitionen und Sätze eingegangen, die zu ihrem Verständnis notwendig sind.

BASS (vgl. [2] und [8]) hat die noetherschen Ringe folgendermaßen charakterisiert: Ein Ring A ist genau dann linksnoethersch, wenn jede direkte Summe von injektiven A-Linksmoduln wieder injektiv ist. Dies führt zur

DEFINITION 1.1. Eine abelsche Kategorie C mit beliebigen direkten Summen und genügend vielen injektiven Objekten heißt noethersch, wenn jede direkte Summe von injektiven C-Objekten wieder injektiv ist.

Bekanntlich [7] heißt ein Ring A links-erblich, wenn seine linke globale Dimension lGD(A) kleiner oder gleich 1 ist. Damit ist äquivalent, daß jedes Linksideal von A projektiv ist.

DEFINITION 1.2. Eine abelsche Kategorie C mit genügend vielen injektiven und projektiven Objekten heißt erblich, wenn die globale Dimension GD(C) kleiner oder gleich 1 ist. D.h. wenn jede der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(a) Jedes Unterobjekt eines projektiven C-Objektes ist projektiv.

(b) Jeder Quotient eines injektiven C-Objektes ist injektiv.

Wir können jetzt unser Ergebnis, den Funktor $\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E)$ betreffend, formulieren:

THEOREM 5.1. C sei eine noethersche, erbliche Kategorie, in der es einen projektiven Generator G gibt. $T:C \to {}_AM$ sei ein kontravarianter Funktor mit den Eigenschaften:

(1) T ist halbexakt. (D.h. ist $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ eine exakte C-Sequenz, so ist die C'-Sequenz $TE'' \to TE \to TE'$ exakt.)

(2) $TG = 0$.

(3) T überführt direkte Summen in direkte Produkte.

Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, so daß

$$T \cong \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E) \quad \text{und} \quad S_1T \cong \mathrm{Hom}_C(\cdot,E).$$

(S_1T ist dabei der Linkssatellit von T.)

Anschließend wird gezeigt (Satz 6.1), daß Theorem 5.1 die noetherschen, erblichen Kategorien charakterisiert (unter gewissen Voraussetzungen über C, die z.B. von einer Kategorie von Moduln erfüllt werden). Ferner ergeben sich aus einer Charakterisierung der erblichen Ringe durch MATLIS [23] Charakterisierungen der erblichen Kategorien (Satz 6.3) und der noetherschen, erblichen Kategorien. So ist eine abelsche Kategorie C (unter einfachen Voraussetzungen über C) genau

dann noethersch und erblich, wenn jedes C-Objekt ein größtes injektives Unterobjekt besitzt (Satz 6.2).

Anschließend werden für ein A-Linksobjekt E von C die Funktoren $\mathrm{Tor}_n^A(\cdot,E) : M_A \to C$ als n-te Linksableitungen des Funktors $\cdot \otimes_A E : M_A \to C$ definiert (§8).

Unsere Resultate für den Funktor $\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E)$ ergeben sich aus den vorhergehenden Ergebnissen für den Funktor $\mathrm{Ext}_C^1(\cdot,E)$ durch "Dualisieren", indem man die Begriffe "injektives C-Objekt" durch "platter A-Linksmodul", "globale Dimension von C" durch "schwache globale Dimension von A" (GWD(A)) usw. ersetzt.

Zunächst soll angegeben werden, welche Ringe bei dieser "Dualisierung" den noetherschen, erblichen Kategorien entsprechen:

DEFINITION 1.3. Ein Ring A heißt rechts-kohärent, wenn er den folgenden äquivalenten Bedingungen genügt:

(a) Jedes Rechtsideal von A, das von endlichem Typ ist, ist von endlicher Darstellung.

(b) Jedes Produkt von platten A-Linksmoduln ist platt.

(c) Der A-Linksmodul A^N ist platt.

Die Äquivalenz der Bedingungen (a) bis (c) ist in [8] und in ([6], chap.I, §2, ex. 12) bewiesen.

Ein Ring A heißt rechts-semierblich, wenn jedes endlich erzeugbare Rechtsideal von A projektiv ist [7]. Beachtet man, daß ein platter Modul von endlicher Darstellung projektiv ist, so sind die rechts-semierblichen Ringe gerade die rechts-kohärenten Ringe mit $\mathrm{GWD}(A) \leq 1$. Dies sind somit die gesuchten Analoga zu den noetherschen, erblichen Kategorien.

Wir erhalten dann die folgende Charakterisierung der Funktoren $\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E)$ für semierbliche Ringe:

THEOREM 8.1. A sei ein rechts-semierblicher Ring, C eine abelsche Kategorie mit exakten filtrierenden induktiven Limites. $T : M_A \to C$ sei ein kovarianter Funktor mit den Eigenschaften:

(1) T ist halbexakt.

(2) $TA = 0$.

(3) T ist mit filtrierenden induktiven Limites vertauschbar.

Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, für das gilt:

$$T \cong \mathrm{Tor}_1^A(\cdot, E) \quad \text{und} \quad S^1T \cong \cdot \otimes E.$$

Anschließend wird gezeigt, daß Theorem 8.1 die rechts-semierblichen Ringe charakterisiert (Satz 9.1). Ferner liefert die Dualisierung des erwähnten Resultats von MATLIS Charakterisierungen der Ringe mit $GWD(A) \leq 1$ (Satz 9.3) und der rechts-semierblichen Ringe (Satz 9.2): Ein Ring A ist genau dann rechts-semierblich, wenn es zu jedem A-Linksmodul E einen kleinsten Untermodul F gibt, für den E/F platt ist.

Es sei schließlich noch das folgende Resultat erwähnt: Es ist bekannt, daß jede natürliche Transformation des Funktors $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ in den Funktor $\mathrm{Hom}(F,\cdot)$ durch einen Morphismus von F in E induziert wird. Analoge Ergebnisse gelten für die Funktoren $\mathrm{Hom}(\cdot,E)$, $\cdot \otimes E$ und nach HILTON und REES [19] auch für die Funktoren $\mathrm{Ext}^1(E,\cdot)$, das letzte Ergebnis unter der Voraussetzung, daß es in C genügend viele projektive Objekte gibt. (Natürlich haben auch die Funktoren $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ diese Eigenschaft, falls es in C genügend viele injektive Objekte gibt.) Nach OORT [24] ist jedoch das entsprechende Resultat für die Funktoren $\mathrm{Ext}^2(E,\cdot)$ nicht richtig.

In diesem Zusammenhang ergibt sich für die Funktoren $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\cdot,E)$ folgendes: Bekanntlich gibt es eine abelsche Gruppe E, deren Torsionsuntergruppe tE nicht direkter Summand von E ist. Man erhält dann einen Isomorphismus $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\cdot,E) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\cdot,tE)$, der nicht durch einen Morphismus von E in tE induziert wird (Bemerkung 9.2).

Es sei noch bemerkt, daß alle Ringe ein Einselement besitzen sollen, das als Einheitsoperator auf allen A-Moduln operiert, ferner sollen alle Ringhomomorphismen 1 in 1 überführen. Für die allgemeinen Eigenschaften von Kategorien und Funktoren sei auf [7], [14], [16], [22] verwiesen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. GROTEMEYER für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte.

§2. Ergänzende Bemerkungen über Kategorien und Funktoren

Es sollen hier einige größtenteils gut bekannte Eigenschaften von Kategorien und Funktoren zusammengestellt werden, die wir später benötigen werden.

Der Begriff eines induktiven Systems $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ - im folgenden oft mit E_α bezeichnet - in einer Kategorie C bezüglich einer prägeordneten Indexmenge werde als bekannt vorausgesetzt. Es sei nur noch einmal daran erinnert, wie man den Begriff des induktiven Limes in Kategorien auf den des projektiven Limes von Mengen zurückführt. (Die entsprechenden Ergebnisse für projektive Limites in C erhält man durch Übergang zu C^0, der zu C dualen Kategorie.)

Ein induktives System (u_α) von C-Morphismen des induktiven Systems $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ in ein C-Objekt E besteht aus C-Morphismen $u_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$, so daß $u_\alpha = u_\beta \circ u_{\beta\alpha}$ für jedes Paar $\alpha \leqslant \beta$ gilt. Ein induktives System (u_α) ist somit gerade ein Element aus $\varprojlim \mathrm{Hom}(E_\alpha, F)$ ([3],§1). Dann heißt ein Paar (u_α, E), bestehend aus einem C-Objekt E und einem induktiven System (u_α) von C-Morphismen von E_α in E, induktiver Limes von $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$, wenn es zu jedem C-Objekt F und zu jedem induktiven System $v_\alpha : E_\alpha \longrightarrow F$ von C-Morphismen genau einen C-Morphismus $v : E \longrightarrow F$ gibt, so daß $v_\alpha = v \circ u_\alpha$ für alle α gilt. Diese Definition liefert dann:

LEMMA 2.1. $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ sei ein induktives System in einer Kategorie C. E sei ein C-Objekt und $u_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ sei ein induktives System von C-Morphismen. (u_α, E) ist genau dann induktiver Limes von $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$, wenn für jedes C-Objekt F die durch das projektive System von Abbildungen $\mathrm{Hom}(u_\alpha, F) : \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(E_\alpha, F)$ definierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Hom}(E_\alpha, F)$$

bijektiv ist.

Es sei noch erwähnt, daß der Begriff des induktiven Limes den Begriff der direkten Summe $(i_\alpha, \bigoplus E_\alpha)$ einer Familie (E_α) $(\alpha \in I)$ von C-Objekten umfaßt. Man braucht dazu nur die Indexmenge I mit der diskreten Ordnung zu versehen. Insbesondere liefert Lemma 2.1 die Formel $\mathrm{Hom}(\bigoplus E_\alpha, F) = \prod \mathrm{Hom}(E_\alpha, F)$. Man spricht von filtrierendem induktiven Limes-kurz f.induktiver

Limes - falls die Indexmenge I des zugehörigen induktiven Systems aufsteigend gefiltert ist (zu $\alpha,\beta \in I$ gibt es $\gamma \in I$ mit $\alpha,\beta \leq \gamma$). Ferner sei daran erinnert, daß ein kovarianter Funktor T (von einer Kategorie C mit induktiven Limites in eine Kategorie C') mit induktiven Limites vertauschbar heißt, wenn für jedes induktive System E_α in C mit Limes (u_α, E), (Tu_α, TE) ein induktiver Limes des induktiven Systems TE_α in C' ist. Analog definiert man Funktoren, die mit f.induktiven Limites oder mit direkten Summen vertauschbar sind. Man sagt, daß ein kontravarianter Funktor $T : C \to C'$ induktive Limites in projektive Limites überführt, wenn er als kovarianter Funktor von C in $(C')^o$ betrachtet, mit induktiven Limites vertauschbar ist.

Wenn $T : C \to C'$ ein kovarianter Funktor und F ein C'-Objekt ist, wollen wir mit $\mathrm{Hom}_{C'}(T\cdot, F)$ die Komposition der Funktoren T und $\mathrm{Hom}_{C'}(\cdot, F)$ bezeichnen. Aus Lemma 2.1 folgt dann:

SATZ 2.1. C und C' seien Kategorien, in C gebe es beliebige induktive Limites. Ein kovarianter Funktor $T: C \to C'$ ist genau dann mit induktiven Limites vertauschbar, wenn für jedes C'-Objekt F der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_{C'}(T\cdot, F)$ von C in die Kategorie der Mengen induktive Limites in projektive Limites überführt.

In ähnlicher Weise wird durch das folgende Lemma und seine Dualisierungen der Begriff einer exakten Sequenz in abelschen Kategorien zurückgeführt auf den der Exaktheit von Sequenzen in der Kategorie Ab der abelschen Gruppen.

LEMMA 2.2. C sei eine abelsche Kategorie, dann gilt:

(1) Eine C-Sequenz $E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für jedes C-Objekt F die Sequenz abelscher Gruppen $0 \to \mathrm{Hom}(E'',F) \to \mathrm{Hom}(E,F) \to \mathrm{Hom}(E',F)$ exakt ist.

(2) Gibt es in C genügend viele injektive Objekte, dann ist eine C-Sequenz $E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$ genau dann exakt, wenn für jedes injektive C-Objekt I die Sequenz abelscher Gruppen $\mathrm{Hom}(E'',I) \to \mathrm{Hom}(E,I) \to \mathrm{Hom}(E',I)$ exakt ist.

BEWEIS. (1) Beide Eigenschaften besagen, daß (v,E") ein Cokern von u ist.

(2) Es ist klar, daß die Bedingung notwendig ist. Sie ist auch hinreichend: Zunächst sieht man, daß $v \circ u = 0$ gilt. Folglich existieren exakte Sequenzen $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{v} E''$ und $E' \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} H \longrightarrow 0$ mit $i \circ j = u$. Für jedes injektive C-Objekt I erhält man dann exakte Sequenzen

$$\mathrm{Hom}(E'',I) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(E,I) \xrightarrow{\bar{I}} \mathrm{Hom}(K,I) \longrightarrow 0$$

$$\mathrm{Hom}(E'',I) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(E,I) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(E',I)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H,I) \xrightarrow{\bar{p}} \mathrm{Hom}(K,I) \xrightarrow{\bar{j}} \mathrm{Hom}(E',I)$$

Unter Berücksichtigung von $\bar{j} \circ \bar{I} = \bar{u}$ ergibt sich daraus, daß $\bar{j}$ injektiv ist. Folglich $\mathrm{Hom}(H,I) = 0$ für jedes injektive I. Das zeigt $H = 0$, j ist also surjektiv und die Sequenz $E' \longrightarrow E \longrightarrow E''$ exakt.

Als unmittelbare Folge ergibt sich:

SATZ 2.2. T sei ein kovarianter Funktor einer abelschen Kategorie C in eine abelsche Kategorie C'. Es gilt:

(1) T ist genau dann rechtsexakt, wenn für jedes C'-Objekt F der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_{C'}(T\cdot,F): C \longrightarrow \mathrm{Ab}$ linksexakt ist.

(2) Gibt es in C' genügend viele injektive Objekte, so ist T genau dann exakt, wenn für jedes injektive C'-Objekt I der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_{C'}(T\cdot,I): C \longrightarrow \mathrm{Ab}$ exakt ist.

Als einfache Anwendung erhalten wir das folgende Ergebnis: In einer abelschen Kategorie mit induktiven Limites sind auf evidente Weise die Funktoren $(E_\alpha, u_{\alpha\beta}) \rightsquigarrow \varinjlim E_\alpha$ und $(E_\alpha) \rightsquigarrow \bigoplus E_\alpha$ definiert. Aus den Formeln $\mathrm{Hom}(\varinjlim E_\alpha, F) = \varprojlim \mathrm{Hom}(E_\alpha, F)$ und $\mathrm{Hom}(\bigoplus E_\alpha, F) = \prod \mathrm{Hom}(E_\alpha, F)$ (Lemma 2.1) folgt nach (1), daß beide Funktoren rechtsexakt sind. Gibt es in C genügend viele injektive Objekte, so zeigt (2), daß in C der Funktor "direkte Summe" exakt ist.

LEMMA 2.3. In einer abelschen Kategorie C mit beliebigen direkten Summen gibt es beliebige induktive Limites.

BEWEIS. $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ sei ein induktives System in C über der prägeordneten Indexmenge I. Für $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$ sei $E_{\alpha\beta} = E_\alpha$, ferner sei $(i_{\alpha\beta}, E'')$ bzw. (i_α, E') eine direkte Summe von $(E_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta}$ bzw. von (E_α) $(\alpha \in I)$. Der Morphismus $v: E'' \longrightarrow E'$ habe die Komponenten $v \cdot i_{\alpha\beta} = i_\alpha - i_\beta \circ u_{\beta\alpha}$ (für $\alpha \leq \beta$). v definiert eine exakte Sequenz

$$E'' \xrightarrow{v} E' \xrightarrow{u} E \longrightarrow 0.$$

Mit $u_\alpha = u \circ i_\alpha$ ist dann (u_α, E) ein induktiver Limes von $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$. Ist nämlich F ein C-Objekt und $g_\alpha : E_\alpha \longrightarrow F$ ein induktives System von Morphismen (für $\alpha \leq \beta$ gilt: $g_\alpha = g_\beta \circ u_{\beta\alpha}$), so gibt es zunächst einen Morphismus $h : E' \longrightarrow F$ mit den Komponenten $h \circ i_\alpha = g_\alpha$ und es gilt $h \circ v = 0$. Daher gibt es genau ein $g : E \longrightarrow F$ mit $g \circ u = h$, d.h. mit $g \circ u_\alpha = g_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Das Lemma ist bewiesen.

Sei nun C' eine weitere abelsche Kategorie und $T : C \longrightarrow C'$ ein rechtsexakter Funktor, der mit direkten Summen vertauschbar ist, dann ist die Sequenz

$$TE'' \xrightarrow{Tv} TE' \xrightarrow{Tu} TE \longrightarrow 0$$

exakt. Ferner ist $(Ti_{\alpha\beta}, TE'')$ bzw. (Ti_α, TE') eine direkte Summe von $(TE_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta}$ bzw. von $(TE_\alpha)_{\alpha \in I}$. Und Tv hat die Komponenten $Tv \circ Ti_{\alpha\beta} = Ti_\alpha - Ti_\beta \circ Tu_{\beta\alpha}$ $(\alpha \leq \beta)$. (Man beachte, daß ein halbexakter Funktor additiv ist.) Weil noch $Tu_\alpha = Tu \circ Ti_\alpha$ gilt, ist nach dem oben Bewiesenen (Tu_α, TE) ein induktiver Limes des Systems $(TE_\alpha, Tu_{\alpha\beta})$. Damit ist gezeigt:

SATZ 2.3. C und C' seien abelsche Kategorien mit beliebigen direkten Summen. $T : C \longrightarrow C'$ sei ein kovarianter, rechtsexakter Funktor, der mit beliebigen direkten Summen vertauschbar ist. Dann ist T mit induktiven Limites vertauschbar.

Als nächstes wollen wir die Frage behandeln, wieweit sich Vertauschbarkeitseigenschaften eines Funktors mit direkten Summen auch auf seine Satelliten übertragen. Bekanntlich sind die Linkssatelliten $S_n T$ eines halbexakten Funktors T mit beliebigen direkten Summen vertauschbar, falls dies für T gilt (unter schwachen Voraussetzungen über die fraglichen Kategorien). Für Rechtssatelliten gilt dies nur unter zusätzlichen "noetherschen" (Definition 1.1) Voraussetzungen:

SATZ 2.4. $T : C \longrightarrow C'$ sei ein kovarianter, halbexakter Funktor einer noetherschen Kategorie C in eine abelsche Kategorie C'. Ist T mit beliebigen direkten Summen vertauschbar, so gilt dasselbe für die Rechtssatelliten $S^n T$ $(n \geq 0)$.

BEWEIS. (E_α) sei eine Familie von C-Objekten, und für jedes α sei $0 \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow I_\alpha \longrightarrow H_\alpha \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz mit injektivem I_α. (i_α, E), (j_α, I) bzw. (h_α, H) seien direkte Summen von E_α, I_α

bzw. von H_α. Weil es in C genügend viele injektive Objekte gibt, ist in C der Funktor "direkte Summe" exakt. Wir erhalten somit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_\alpha & \longrightarrow & I_\alpha & \longrightarrow & H_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle j_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle h_\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & I & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und I ist injektiv, weil C noethersch ist. Übergang zu den Rechtssatelliten liefert das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} TI_\alpha & \longrightarrow & TH_\alpha & \longrightarrow & S^1TE_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle T(j_\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle T(h_\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle S^1T(i_\alpha)} & & \\ TI & \longrightarrow & TH & \longrightarrow & S^1TE & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Weil T mit direkten Summen vertauschbar ist, sind $(T(j_\alpha),TI)$ bzw. $(T(h_\alpha),TH)$ direkte Summen von TI_α bzw. von TH_α. Es folgt durch einfache Rechnung, daß $S^1T(i_\alpha):S^1TE_\alpha \to S^1TE$ eine direkte Summendarstellung ist. Damit ist gezeigt, daß S^1T mit direkten Summen vertauschbar ist. Da sich die Satelliten S^nT durch Iteration ergeben, ist der Satz bewiesen.

Falls die Kategorie C nicht noethersch ist, braucht Satz 2.4 nicht zu gelten. (Man sieht leicht, daß man noethersche Ringe durch Satz 2.4 charakterisieren kann.) Wir haben jedoch das folgende Resultat:

SATZ 2.5. C und C' seien abelsche Kategorien. In C gebe es beliebige direkte Summen und genügend viele injektive Objekte. Ist $T:C \to C'$ halbexakt und mit f.induktiven Limites vertauschbar, so ist S^1T mit direkten Summen vertauschbar.

BEWEIS. Wir zeigen noch etwas mehr: Sei $(E_\alpha,u_{\alpha\beta})$ ein induktives System in C über einer aufsteigend gefilterten Indexmenge mit induktivem Limes (u_α,E), so daß alle u_α injektive Morphismen sind. Dann ist $(S^1T(u_\alpha),S^1TE)$ ein induktiver Limes des Systems S^1TE_α.

Ist nämlich (e): $0 \to E \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} H \to 0$ eine exakte Sequenz mit injektivem I, so erhalten wir für jedes α ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} (e_\alpha): & 0 & \longrightarrow & E_\alpha & \xrightarrow{f\circ u_\alpha} & I & \xrightarrow{g_\alpha} & H_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & & {\scriptstyle u_\alpha}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle h_\alpha} & & \\ (e): & 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die exakten Sequenzen (e_α) bilden auf natürliche Weise ein induktives System. Ferner prüft man leicht nach, daß (h_α, H) ein induktiver Limes des induktiven Systems H_α ist. Nach Definition der Rechtssatelliten erhalten wir dann ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} TI & \xrightarrow{Tg_\alpha} & TH_\alpha & \longrightarrow & S^1TE_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \downarrow T(h_\alpha) & & \downarrow S^1T(u_\alpha) & & \\ TI & \xrightarrow{Tg} & TH & \longrightarrow & S^1TE & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Weil $(T(h_\alpha), TH)$ induktiver Limes von TH_α ist, ist dann auch S^1TE bezüglich der $S^1T(u_\alpha)$ induktiver Limes des Systems S^1TE_α.

Um den Satz vollständig zu beweisen, brauchen wir nur noch zu bemerken, daß S^1T als halbexakter Funktor mit endlichen direkten Summen vertauschbar ist, daß ferner eine beliebige direkte Summe induktiver Limes der endlichen Teilsummen ist, und daß die zugehörigen "Keimhomomorphismen" injektiv sind, weil sie mit direkten Faktoren identifizieren.

Es soll anschließend an einige Resultate erinnert werden, die mit dem Begriff des Generators zusammenhängen (siehe [16]). Ein Objekt G in einer abelschen Kategorie C heißt Generator in C, wenn gilt: Ist u ein C-Morphismus mit $\mathrm{Hom}(G,u) = 0$, so gilt $u = 0$. Gibt es in C beliebige direkte Summen, so ist G genau dann ein Generator, wenn es zu jedem C-Objekt E eine exakte Sequenz $G^{(I)} \to E \longrightarrow 0$ gibt. Ein Objekt V aus C heißt Cogenerator von C, wenn V ein Generator in der zu C dualen Kategorie C^0 ist.

Ist C eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen und genügend vielen injektiven Objekten, in der es einen Generator G gibt, so gibt es in C auch einen Cogenerator. Der Beweis sei kurz skizziert: Weil es in C einen Generator und beliebige direkte Summen gibt, bilden für jedes C-Objekt E die Unterobjekte und die Quotientenobjekte von E eine Menge. Man kann daher die direkte Summe aller Quotienten von G bilden und diese in ein injektives Objekt V einbetten. V ist ein Cogenerator von C. Beachtet man, daß in einer Kategorie von A-Linksmoduln A ein Generator ist, so ergibt sich, daß ${}_AM$ auch einen Cogenerator besitzt. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß eine Grothendieck-Kategorie eine abelsche Kategorie

mit exakten f.induktiven Limites ist, in der es einen Generator gibt. Eine Grothendieck-Kategorie besitzt genügend viele injektive Objekte [16], also auch einen Cogenerator.

Die Bedeutung der Generatoren und Cogeneratoren geht aus dem folgenden Satz hervor:

SATZ 2.6. C und C' seien abelsche Kategorien. In C gebe es beliebige direkte Summen und einen Generator G. $T,U : C \to C'$ seien kovariante, rechtsexakte Funktoren, die mit direkten Summen vertauschbar sind. Ist dann $u: T \to U$ ein Morphismus von Funktoren und $u_G : TG \to UG$ ein Isomorphismus, so ist auch u ein Isomorphismus.

BEWEIS. Es ist zu zeigen, daß für jedes C-Objekt E $u_E : TE \to UE$ ein Isomorphismus ist. Nun gibt es eine exakte Sequenz $G^{(I)} \to G^{(J)} \to E \to 0$, weil G ein Generator ist. Diese liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} T(G^{(I)}) & \to & T(G^{(J)}) & \to & TE & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u_E & & \\ U(G^{(I)}) & \to & U(G^{(J)}) & \to & UE & \to & 0 \end{array}$$

dessen Zeilen exakt sind, weil die Funktoren T und U rechtsexakt sind. Ferner sind die beiden ersten vertikalen Morphismen Isomorphismen, weil T und U mit beliebigen direkten Summen vertauschbar sind, und weil u_G ein Isomorphismus ist. Nach einem Standardargument ist auch u_E ein Isomorphismus.

E sei ein A-Linksmodul. Bekanntlich heißt E <u>von endlicher Darstellung</u>, wenn es eine exakte Sequenz $A^n \to A^m \to E \to 0$ gibt. Das folgende Lemma charakterisiert diese Objekte durch Eigenschaften des Funktors Hom(E,·).

LEMMA 2.4. Ein A-Linksmodul E ist genau dann von endlicher Darstellung, wenn der Funktor Hom(E,·) mit f.induktiven Limites vertauschbar ist.

BEWEIS. Es ist bekannt ([6], chap.I, §2, ex.9), daß Hom(E,·) mit f.induktiven Limites vertauschbar ist, wenn E von endlicher Darstellung ist.

Umgekehrt sei Hom(E,·) mit f.induktiven Limites vertauschbar. E ist f.induktiver Limes eines induktiven Systems E_α von

A-Linksmoduln von endlicher Darstellung ([6], chap.I, §2, ex.10). $u_\alpha : E_\alpha \to E$ seien die zugehörigen "Keimhomomorphismen". Nach Voraussetzung ist die natürliche Abbildung $\varinjlim \mathrm{Hom}(E, E_\alpha) \to \mathrm{Hom}(E,E)$ bijektiv. Folglich gibt es ein α und einen Homomorphismus $g_\alpha : E \to E_\alpha$ mit $u_\alpha \cdot g_\alpha = 1_E$. E ist somit als direkter Faktor eines Moduls von endlicher Darstellung selbst von endlicher Darstellung.

Wir erinnern daran, daß ein <u>exakt verbundenes Funktorpaar</u> (T,T') aus (kovarianten) Funktoren T,T' einer abelschen Kategorie C in eine abelsche Kategorie C' besteht, zusammen mit Morphismen $d_e : TE'' \to T'E'$, die für jede exakte C-Sequenz $e: 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ definiert sind, so daß gilt:

a) Für jede exakte C-Sequenz $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ ist die Sequenz $TE' \to TE \to TE'' \to T'E' \to T'E \to T'E''$ exakt.

b) Für jedes kommutative Diagramm exakter C-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & E' & \to & E & \to & E'' \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & F' & \to & F & \to & F'' \to 0 \end{array}$$

ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TE'' & \to & T'E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ TF'' & \to & T'F' \end{array}$$

kommutativ.

Ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare $(u,u') : (T,T') \to (U,U')$ besteht aus Morphismen $u : T \to U$, $u' : T' \to U'$, so daß für jede exakte C-Sequenz $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TE'' & \to & T'E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ UE'' & \to & U'E' \end{array}$$

kommutativ ist.

Beispiele exakt verbundener Funktorpaare erhält man durch Satellitenbildung halbexakter Funktoren. Die Sätze aus ([22], chap.XII, §7) enthalten die folgenden Spezialfälle (vgl. auch [7], chap.III, §5):

SATZ 2.7. (Universelle Charakterisierung von Satelliten). C, C' seien abelsche Kategorien. (T,T') sei ein exakt verbundenes Funktorpaar von C in C'. Ferner sei $U : C \to C'$ ein halb-

exakter Funktor. Dann gilt:

(a) Gibt es in C genügend viele injektive Objekte, dann ist der Rechtssatellit S^1U von U definiert, und zu jedem Morphismus $u : U \longrightarrow T$ gibt es genau einen Morphismus $v : S^1U \longrightarrow T'$, für den $(u,v) : (U,S^1U) \rightarrow (T,T')$ ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare ist.

(b) Gibt es in C genügend viele projektive Objekte, dann ist der Linkssatellit S_1U von U definiert, und zu jedem Morphismus $v : T' \rightarrow U$ gibt es genau einen Morphismus $u : T \rightarrow S_1U$, für den $(u,v) : (T,T') \rightarrow (S_1U,U)$ ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare ist.

Sind T und U Funktoren von C in C', so sei mit HOM(T,U) die abelsche Gruppe der Morphismen des Funktors T in den Funktor U bezeichnet. (Etwaige mengentheoretische Bedenken seien hier außer acht gelassen.) Sind dann (T,T') und (U,U') exakt verbundene Funktorpaare mit $T' = S^1T$, so liefert Satz 2.7 (a) eine Abbildung $HOM(T,U) \rightarrow HOM(T',U')$. Gilt noch $U = S_1U'$, so liefert (b) eine Abbildung $HOM(T',U') \rightarrow HOM(T,U)$, die zu der vorhergehenden reziprok ist. Damit ist gezeigt:

KOROLLAR. C, C' seien abelsche Kategorien. In C gebe es genügend viele injektive und projektive Objekte. Dann gilt: Sind (T,T') und (U,U') exakt verbundene Funktorpaare von C in C' mit $T' = S^1T$ und $U = S_1U'$, so gilt

$$HOM(T,U) = HOM(T',U')$$

bis auf natürliche Isomorphie. Ist insbesondere $u : T \rightarrow U$ ein Isomorphismus, so ist auch das entsprechende Element $u' : T' \rightarrow U'$ ein Isomorphismus.

SATZ 2.8. C,C' seien abelsche Kategorien. (T,T') sei ein exakt verbundenes Funktorpaar von C in C'.

(1) In C gebe es genügend viele injektive Objekte. T' identifiziert sich genau dann mit dem Rechtssatelliten von T, wenn $T'I = 0$ für jedes injektive C-Objekt I gilt.

(2) In C gebe es genügend viele projektive Objekte. T identifiziert sich genau dann mit dem Linkssatelliten von T', wenn $TP = 0$ für jedes projektive C-Objekt P gilt.

§3. Die Kategorie der A-Linksobjekte einer abelschen Kategorie

A sei ein Ring. Ein A-Linksmodul ist eine abelsche Gruppe E zusammen mit einem Ringhomomorphismus $A \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(E)$. Es ist klar, daß eine solche Bildung auch im Rahmen der abelschen Kategorien einen Sinn hat. Dies führt auf den Begriff des A-Linksobjektes einer abelschen Kategorie. Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden im §7 zur Behandlung der Tensorprodukte zwischen Moduln und Objekten einer abelschen Kategorie benötigt.

DEFINITION 3.1. A sei ein Ring, C eine additive Kategorie. Ein Paar (E,φ), bestehend aus einem C-Objekt E und einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \longrightarrow End_C(E)$, heißt A-Linksobjekt von C. φ heißt A-Struktur auf E.

Analog wird der Begriff des A-Rechtsobjektes definiert: Ein A-Rechtsobjekt von C besteht aus einem Objekt E aus C und einem Ringhomomorphismus $\psi : A^o \longrightarrow End_C(E)$, wobei A^o der zu A entgegengesetzte Ring ist. Ein A-Rechtsobjekt von C ist gerade ein A-Linksobjekt in der zu C dualen Kategorie C^o. Es ist klar, daß ein kovarianter bzw. kontravarianter, additiver Funktor von einer additiven Kategorie C in eine additive Kategorie C' A-Linksobjekte von C in A-Linksobjekte bzw. A-Rechtsobjekte von C' überführt.

Wir wollen im folgenden ein A-Linksobjekt (E,φ) bzw. ein A-Rechtsobjekt (E,ψ) einfach mit E und die zugehörige A-Struktur mit φ_E bzw. ψ_E bezeichnen, wenn von ihr die Rede ist.

DEFINITION 3.2. E und F seien A-Linksobjekte von C. Ein Morphismus $u \in Hom_C(E,F)$ heißt A-Morphismus von E in F, wenn für jedes $a \in A$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ {\scriptstyle \varphi_E(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_F(a)} \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

kommutativ ist.

Es ist klar, daß die A-Morphismen von E in F eine Untergruppe von $Hom_C(E,F)$ bilden, und daß die C-Komposition von

A-Morphismen wieder A-Morphismen liefert. Damit ist gezeigt, daß die A-Linksobjekte bzw. die A-Rechtsobjekte von C eine additive Kategorie bilden, die wir mit ${}_AC$ bzw. C_A bezeichnen wollen. Ist B ein weiterer Ring, so kann man, genauso wie für Moduln, die Kategorie ${}_AC_B$ der (A,B)-Biobjekte von C bilden, die sich mit jeder der beiden Kategorien $({}_AC)_B$ und ${}_A(C_B)$ identifiziert.

Es sei noch erwähnt, daß durch $(E,\varphi) \rightsquigarrow E$ ein Funktor ${}_AC \to C$ definiert ist, den wir den kanonischen Funktor nennen wollen. Es gilt dann der Satz:

SATZ 3.1. C sei eine abelsche Kategorie und A ein Ring.

(1) ${}_AC$ ist eine abelsche Kategorie, und eine Sequenz ist in ${}_AC$ genau dann exakt, wenn sie in C exakt ist. (D.h. der Funktor ${}_AC \to C$ ist exakt und treu.)

(2) Ist C eine Kategorie mit beliebigen direkten Summen, dann gilt dasselbe für ${}_AC$, und der kanonische Funktor ${}_AC \to C$ ist mit beliebigen induktiven Limites vertauschbar.

(3) Ist C eine Kategorie mit beliebigen direkten Produkten, dann gilt dasselbe für ${}_AC$, und der kanonische Funktor ${}_AC \to C$ ist mit projektiven Limites vertauschbar.

Auf den Beweis dieses Satzes sei hier verzichtet, weil er sich genauso wie für Moduln beweisen läßt, wie das folgende typische Beispiel zeigt:

E und F seien A-Linksobjekte von C. Ferner sei (N,j) ein C-Kern des A-Morphismus $u: E \to F$. Dann gibt es genau eine A-Struktur auf N, für die j ein A-Morphismus ist, und (N,j) ist ein Kern von u in ${}_AC$: Zur Definition von φ_N betrachte man das folgende Diagramm in C, dessen Zeilen exakt sind: $(a \in A)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{u} & F \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_N(a)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_E(a)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_F(a)} \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

Dabei existiert $\varphi_N(a)$, weil das rechte Viereck kommutativ ist. Damit ist ein Ringhomomorphismus $\varphi_N : A \to \mathrm{End}_C(N)$ konstruiert. N ist somit A-Linksobjekt von C und j ist ein A-Morphismus nach Definition. Ferner ist j injektiv in ${}_AC$. Man prüft leicht nach, daß (N,j) ein Kern von u in ${}_AC$ ist.

§4. Der Funktor Hom(E,·) in abelschen Kategorien

E sei ein Objekt einer abelschen Kategorie C. E definiert einen Funktor $\mathrm{Hom}(E,\cdot) : C \to Ab$. Ist $T : C \to Ab$ ein weiterer kovarianter, additiver Funktor, so können wir die abelsche Gruppe $\mathrm{HOM}(\mathrm{Hom}(E,\cdot),T)$ der Morphismen des Funktors $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ in den Funktor T bilden. Es gibt dann ([17],chap.III) einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{HOM}(\mathrm{Hom}(E,\cdot),T) \to TE. \tag{4.1}$$

Es sei kurz an seine Definition erinnert: Einem Morphismus $u : \mathrm{Hom}(E,\cdot) \to T$ wird das Element $u_E(1_E)$ aus TE zugeordnet. Ist umgekehrt $e \in TE$, so definiert man durch $u_F(f) = (Tf)(e)$ $(F \in C,\ f \in \mathrm{Hom}(E,F))$ einen Morphismus des Funktors $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ in den Funktor T. Die beiden Abbildungen sind zueinander invers.

Ist insbesondere $T = \mathrm{Hom}(F,\cdot)$ für ein C-Objekt F, so liefert die zu (4.1) reziproke Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(F,E) \longrightarrow \mathrm{HOM}(\mathrm{Hom}(E,\cdot),\mathrm{Hom}(F,\cdot)). \tag{4.2}$$

Man prüft leicht nach, daß dieser Isomorphismus einem Element $g \in \mathrm{Hom}(F,E)$ die dadurch induzierte natürliche Transformation $\mathrm{Hom}(g,\cdot) : \mathrm{Hom}(E,\cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,\cdot)$ zuordnet.

Sei nun E ein A-Linksobjekt (mit A-Struktur φ_E) einer abelschen Kategorie C. Für jedes C-Objekt G ist dann $\mathrm{Hom}_C(E,G)$ ein A-Rechtsmodul, es ist somit ein Funktor $\mathrm{Hom}_C(E,\cdot) : C \to M_A$ definiert. Ist F ein weiteres A-Linksobjekt von C (mit A-Struktur φ_F) und ist $u : \mathrm{Hom}_C(E,\cdot) \to \mathrm{Hom}_C(F,\cdot)$ ein Morphismus von Funktoren (beide als Funktoren mit Werten in M_A betrachtet), so wird u durch einen C-Morphismus v von F in E induziert (4.2). v ist sogar ein A-Morphismus: $u_E : \mathrm{Hom}(E,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,E)$ ist ein A-Homomorphismus, also gilt für alle $a \in A$:

$$\varphi_F(a) \circ v = v.a = u_E(1_E).a = u_E(1_E \cdot a) = u_E(\varphi_E(a)) = v \circ \varphi_E(a).$$

Damit ist bewiesen, daß $\mathrm{Hom}_C(E,\cdot)$ und $\mathrm{Hom}_C(F,\cdot)$, als Funktoren mit Werten in M_A betrachtet, genau dann isomorph sind, wenn E und F als A-Linksobjekte von C isomorph sind.

Eine weitere Bemerkung: Versieht man für ein C-Objekt E die abelschen Gruppen $\mathrm{Hom}_C(E,F)$ für alle $F \in C$ mit einer A-Rechtsmodulstruktur, so daß die Abbildungen $\mathrm{Hom}(E,f)$ A-Homo-

morphismen sind, so gibt es eine eindeutig bestimmte A-Struktur φ_E auf E, die die A-Modulstrukturen der $\mathrm{Hom}_C(E,F)$ induziert. Ist nämlich $a \in A$, so definiere man $\varphi_E(a) = 1_E.a$ ($\mathrm{Hom}(E,E)$ ist A-Rechtsmodul). Es gilt dann für $a,b \in A$ mit $f = 1_E.a$: $\varphi_E(ab) = 1_E.ab = (1_E.a).b = f.b = (\mathrm{Hom}(E,f)(1_E)).b = (\mathrm{Hom}(E,f))(1_E.b) = f\circ(1_E.b) = \varphi_E(a)\circ\varphi_E(b)$. Der weitere Beweis ist klar.

THEOREM 4.1 (WATTS [25]). C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Produkten und einem Cogenerator V. Ist dann $T : C \longrightarrow M_A$ ein kovarianter, linksexakter Funktor, der mit beliebigen direkten Produkten vertauschbar ist, so gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Objekt $E \in {}_AC$, für das $T \cong \mathrm{Hom}_C(E,\cdot)$ gilt.

BEWEIS. Aufgrund der Vorbemerkungen genügt es, den Beweis im Falle $A = \mathbb{Z}$ zu führen. Setze $E' = V^{TV}$. Weil T mit direkten Produkten vertauschbar ist, gilt $TE' = TV^{TV}$ bis auf natürliche Isomorphie. Sei e' dasjenige Element aus TE', das dabei der identischen Abbildung von TV entspricht. Bezeichnet man für $x \in TV$ mit $p_x : E' \longrightarrow V$ die zugehörige Projektion, so gilt also $(Tp_x)(e') = x$.

Mit Hilfe von $K = \{f \mid f \in \mathrm{Hom}(E',V) \text{ und } (Tf)(e') = 0\}$ definieren wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} E' \xrightarrow{(f)} V^K \qquad (f \in K).$$

Weil T linksexakt und mit direkten Produkten vertauschbar ist, ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow TE \xrightarrow{Ti} TE' \xrightarrow{(Tf)} (TV)^K \quad (f \in K)$$

exakt. Somit gibt es ein Element $e \in TE$ mit $(Ti)(e) = e'$. Sei $u : \mathrm{Hom}(E,\cdot) \longrightarrow T$ diejenige natürliche Transformation, die dem Element e vermöge $TE = \mathrm{HOM}(\mathrm{Hom}(E,\cdot),T)$ entspricht. Für $F \in C$, $v \in \mathrm{Hom}(E,F)$ gilt also $u_F(v) = (Tv)(e)$. Wir wollen zeigen, daß u ein Isomorphismus ist. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß $u_V : \mathrm{Hom}(E,V) \longrightarrow TV$ bijektiv ist. (Wir betrachten $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ und T als kovariante Funktoren von C^o in $(Ab)^o$ und wenden Satz 2.6 an.)

Zunächst ist u_V surjektiv: Ist nämlich $x \in TV$, so ist $p_x\circ i \in \mathrm{Hom}(E,V)$ und $u_V(p_x\circ i) = T(p_x\circ i)(e) = (Tp_x)(e') = x$.

u_V ist auch injektiv: Sei $g \in \mathrm{Hom}(E,V)$ mit $u_V(g) = (Tg)(e) = 0$. Wir wählen eine exakte Sequenz $0 \to N \xrightarrow{j} E \xrightarrow{g} V$, dann ist die Sequenz $0 \to TN \xrightarrow{Tj} TE \xrightarrow{Tg} TV$ exakt, es gibt daher ein Element $a \in TN$ mit $(Tj)(a) = e$. Setze $H = \{h \mid h \in \mathrm{Hom}(E',V)$ und $h \circ (i \circ j) = 0\}$, so ist die Sequenz
$0 \to N \xrightarrow{i \circ j} E' \xrightarrow{(h)} V^H$ $(h \in H)$ exakt, weil V ein Cogenerator von C ist. Und es gilt $H = K$. Die Beziehung $K \subseteq H$ gilt nach Definition von i. Ist umgekehrt $h \in H$, so ist $Th \circ Ti \circ Tj(a) = (Th)(e') = 0$, also $h \in K$. $i : E \to E'$ und $i \circ j : N \to E'$ haben somit denselben Cokern, daher ist j ein Isomorphismus, also $g = 0$.

Damit ist gezeigt, daß $T \cong \mathrm{Hom}(E,\cdot)$ gilt. Daß E durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, folgt aus (4.2).

BEMERKUNG. Man kann zeigen, daß E der Durchschnitt aller Unterobjekte F von E' mit $e' \in \mathrm{Bild}(TF \to TE')$ ist.

Eine einfache Folgerung aus Theorem 4.1 ist, daß - mit den Bezeichnungen von Theorem 4.1 - der Funktor T mit projektiven Limites vertauschbar ist. Dies ist in allgemeiner Form schon in Satz 2.3 enthalten. (Man betrachte dazu T als Funktor von C^0 in $(M_A)^0$.)

KOROLLAR 1. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Produkten und einem Cogenerator. Dann gibt es in C beliebige direkte Summen.

BEWEIS. (E_α) sei eine Familie von C-Objekten. Der Funktor $T = \prod_\alpha \mathrm{Hom}(E_\alpha,\cdot)$ ist linksexakt und wegen der Assoziativität der Produktbildung auch mit direkten Produkten vertauschbar. Folglich gibt es ein Objekt $E \in C$ und einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(E,\cdot) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(E_\alpha,\cdot).$$

E ist dann auf evidente Weise direkte Summe der E_α.

KOROLLAR 2. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Produkten und einem Cogenerator. Der Funktor $T: C \to M_A$ sei direkter Faktor des Funktors $\mathrm{Hom}_C(E,\cdot)$ für ein A-Linksobjekt E von C. Dann gibt es einen direkten Faktor F von E mit $T \cong \mathrm{Hom}_C(F,\cdot)$.

BEWEIS. Als direkter Faktor von $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ ist T linksexakt und mit direkten Produkten vertauschbar. Daher gibt es $F \in {}_AC$

mit $\mathrm{Hom}(F,\cdot) \cong T$. Weil $\mathrm{Hom}(F,\cdot)$ direkter Faktor von $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ ist, ist F direkter Faktor von E (vgl. 4.2).

Für die beiden folgenden bekannten Sätze werden hier neue Beweise gegeben.

KOROLLAR 3. A sei ein Ring, dann ist ein platter A-Linksmodul E von endlicher Darstellung projektiv.

BEWEIS. Der Funktor $\cdot \otimes E : M_A \longrightarrow Ab$ ist exakt, weil E platt ist, und ist mit direkten Produkten vertauschbar, weil E von endlicher Darstellung ist ([6], chap. I, §2, ex.9). Es gibt somit einen A-Rechtsmodul F mit $\mathrm{Hom}_A(F,\cdot) \cong \cdot \otimes_A E$. Es folgt, daß $\mathrm{Hom}_A(F,\cdot)$ exakt und mit f.induktiven Limites vertauschbar ist. Somit ist F projektiv und von endlichem Typ (Lemma 2.4). Es folgt, daß $E \cong \mathrm{Hom}_A(F,A)$ projektiv und von endlichem Typ ist ([4], §2, cor. de la prop.11).

KOROLLAR 4 (Eine Anwendung auf die Garbentheorie). $\varphi : X \longrightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung. $\mathcal{G}$ sei eine Prägarbe abelscher Gruppen über Y. Dann existiert ein reziprokes Bild von $\mathcal{G}$.

BEWEIS. Die Kategorie C der Garben abelscher Gruppen über X ist eine Grothendieck-Kategorie mit beliebigen direkten Produkten [16], genügt also den Bedingungen von Theorem 4.1. Sodann betrachten wir den Funktor $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, \varphi_* \mathcal{F})$ von C in die Kategorie der abelschen Gruppen (dabei ist φ_* der Funktor "direktes Bild", aufgefaßt als Funktor von C in die Kategorie der Prägarben über Y). Der obige Funktor ist linksexakt, weil φ_* linksexakt ist, und er ist mit direkten Produkten vertauschbar, weil dasselbe für φ_* gilt.

Somit gibt es eine Garbe $\varphi^* \mathcal{G}$ über X und einen Isomorphismus (funktoriell in $\mathcal{F}$)

$$\mathrm{Hom}_X(\varphi^* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, \varphi_* \mathcal{F}).$$

Es ergibt sich unmittelbar, daß $\varphi^* \mathcal{G}$ reziprokes Bild der Prägarbe $\mathcal{G}$ ist. (vgl. [17], S. 30-34).

§4' Der Funktor Hom(·,E) in abelschen Kategorien

Die Ergebnisse des §4 liefern durch Dualisieren unmittelbar die folgenden Sätze:

THEOREM 4.1'. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen und einem Generator G. Ist dann $T:C \longrightarrow {}_AM$ ein kontravarianter, linksexakter Funktor, der direkte Summen in direkte Produkte überführt, so gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, so daß

$$T \cong \mathrm{Hom}_C(\cdot,E).$$

Ist C eine Kategorie von Moduln, so erhält man das folgende schärfere Ergebnis:

ZUSATZ (EILENBERG [12]). $T:M_B \longrightarrow {}_AM$ sei ein kontravarianter, additiver Funktor. TB ist dann ein (A,B)-Bimodul, und es gibt eine natürliche Transformation $u:T \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\cdot,TB)$, so daß $u_B:TB \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B,TB)$ ein Isomorphismus ist. u ist genau dann ein Isomorphismus, wenn T linksexakt ist und direkte Summen in direkte Produkte überführt.

BEWEIS. Für einen B-Rechtsmodul F und $x \in F$ sei mit $\bar{x}:B \longrightarrow F$ der durch $\bar{x}(1)=x$ definierte B-Homomorphismus bezeichnet. Dann sei $u_F : TF \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F,TB)$ durch $(u_F(y))(x) = (T\bar{x})(y)$ definiert $(x \in F,\ y \in TF)$. Damit ist eine natürliche Transformation $u : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\cdot,TB)$ definiert. Es ist klar, daß u_B ein Isomorphismus ist. Der Zusatz folgt dann aus Satz 2.6 (man betrachte T und Hom(·,TB) als kovariante Funktoren von M_B in $({}_AM)^o$).

KOROLLAR 1. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen und einem Generator. Der Funktor $T : C \longrightarrow {}_AM$ sei direkter Faktor des Funktors $\mathrm{Hom}_C(\cdot,E)$ für ein A-Linksobjekt E von C. Dann gibt es einen direkten Faktor F von E mit $T \cong \mathrm{Hom}_C(\cdot,F)$.

KOROLLAR 2. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen und einem Generator. Dann gibt es in C beliebige direkte Produkte. Insbesondere besitzt eine Grothendieck-Kategorie beliebige direkte Produkte.

§5. Der Funktor $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ für noethersche, erbliche Kategorien

C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen und genügend vielen injektiven und projektiven Objekten. Dann sind die Funktoren $\mathrm{Ext}^n_C(\cdot,E) : C \to Ab$ halbexakt und überführen direkte Summen in direkte Produkte. Ferner annullieren sie projektive Objekte. Falls die Kategorie C noch erblich ist, gilt $\mathrm{Ext}^n_C(\cdot,E) = 0$ für $n \geq 2$, insbesondere ist also $\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E)$ rechtsexakt. Umgekehrt:

THEOREM 5.1. C sei eine noethersche, erbliche Kategorie, in der es einen projektiven Generator G gibt. $T : C \to {}_AM$ sei ein kontravarianter Funktor mit den Eigenschaften:

(1) T ist halbexakt.

(2) $TG = 0$.

(3) T überführt direkte Summen in direkte Produkte.

Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, so daß

$$T \cong \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E) \quad \text{und} \quad S_1T \cong \mathrm{Hom}(\cdot,E).$$

BEWEIS. Aus (2) und (3) folgt, daß $TP = 0$ für jedes projektive C-Objekt P gilt. Folglich $T \cong S^1(S_1T)$ (man betrachte T als kovarianten Funktor von C^o in ${}_AM$ und wende Satz 2.8 an). Weil C noethersch ist, folgt aus (3), daß S_1T direkte Summen in direkte Produkte überführt (man betrachte T als kovarianten Funktor von C in $({}_AM)^o$ und wende Satz 2.4 an). Und S_1T ist linksexakt, weil C erblich ist ($S_2T = 0$). Nach Theorem 4.1' gibt es dann ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, so daß $S_1T \cong \mathrm{Hom}_C(\cdot,E)$. Es folgt $T \cong S^1(S_1T) \cong \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E)$.

KOROLLAR 1. Die Voraussetzungen über C seien die von Theorem 5.1. Dann ist ein Funktor mit den Eigenschaften (1) bis (3) rechtsexakt.

KOROLLAR 2. Mit den Bezeichnungen von Theorem 5.1 gilt: Das Objekt E ist <u>reduziert</u>, d.h. es gilt $\mathrm{Hom}(I,E) = 0$ für jedes injektive C-Objekt I.

KOROLLAR 3. C sei eine noethersche, erbliche Kategorie mit einem Generator. Dann gibt es zu jedem C-Objekt F ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes reduziertes C-Objekt rF mit $\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,F) \cong \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,rF)$.

BEWEIS. Dies ist eine unmittelbare Folge aus Theorem 5.1 und Korollar 2, angewendet auf den Funktor $T = \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,F)$.

Die Beziehungen zwischen F und rF werden im nächsten Abschnitt genauer untersucht werden.

KOROLLAR 4. C sei eine noethersche, erbliche Kategorie mit einem Generator. Ist dann für ein A-Linksobjekt E von C der Funktor T direkter Faktor des Funktors $\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E)$, so gibt es ein A-Linksobjekt F von C mit $T \cong \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,F)$.

§6. Charakterisierungen der noetherschen, erblichen Kategorien

Der folgende Satz zeigt, daß Theorem 5.1 die noetherschen, erblichen Kategorien kennzeichnet.

SATZ 6.1. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen, in der es genügend viele injektive und projektive Objekte und einen Generator gibt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) C ist noethersch und erblich.

(b) Zu jedem C-Objekt E gibt es ein reduziertes C-Objekt rE mit $\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E) \cong \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,rE)$.

(c) Zu jedem C-Objekt E gibt es ein C-Objekt rE, so daß $S_1(\mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E)) \cong \mathrm{Hom}_C(\cdot,rE)$ gilt.

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b) ist Korollar 3 zu Theorem 5.1.

Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt unmittelbar aus Satz 2.8.

(b) $\Rightarrow$ (a): Zunächst wird gezeigt, daß es einen Morphismus $p_E: E \to rE$ gibt, der einen Isomorphismus $\bar{p}_E: \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,E) \to \mathrm{Ext}^1_C(\cdot,rE)$ induziert. Insbesondere folgt dann aus $p_E=0$, daß E injektiv ist. Dazu betrachten wir die Funktoren $T = \mathrm{Hom}(\cdot,E)$ und $U = \mathrm{Hom}(\cdot,rE)$ und die exakt verbundenen Funktorpaare (T,S^1T) und (U,S^1U) (T und U werden als kovariante Funktoren von C^o

in Ab betrachtet). Weil rE reduziert ist, gilt $S_1S^1U \cong U$ (Satz 2.8 (2)). Daher gibt es (Satz 2.7) zu gegebenem Isomorphismus $v : S^1T \to S^1U$ einen Morphismus $u : T \to U$, so daß $(u,v):(T,S^1T) \to (U,S^1U)$ ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare ist. u wird erzeugt durch einen Morphismus $p_E:E \to rE$, es folgt $v = \bar{p}_E$ (Satz 2.7).

Sei nun (E_α) eine Familie injektiver C-Objekte mit direkter Summe (i_α,E). Betrachte $p_E:E \to rE$. Weil rE reduziert ist, gilt $p_E \circ i_\alpha = 0$ für alle α, d.h. $p_E = 0$. E ist also injektiv. Es folgt, daß C noethersch ist.

C ist auch erblich. Dazu betrachten wir einen surjektiven C-Morphismus $f:E \to F$, wobei E injektiv ist. Es ist zu zeigen, daß auch F injektiv ist. Nun ist rF reduziert, es gilt also $p_F \circ f = 0$. Es folgt $p_F = 0$, somit ist F injektiv.

LEMMA 6.1. Der Morphismus $p_E:E \to rE$ ist surjektiv, und $iE = \mathrm{Kern}(p_E)$ ist das größte injektive Unterobjekt von E. Insbesondere gilt $E \cong iE \oplus rE$.

BEWEIS. Wir bilden exakte Sequenzen $0 \to N \to E \xrightarrow{q} B \to 0$ und $0 \to B \xrightarrow{i} rE$ mit $i \circ q = p_E$. Weil C erblich ist, erhält man eine exakte Funktorsequenz $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E) \xrightarrow{\bar{q}} \mathrm{Ext}^1(\cdot,B) \to 0$. Weil $\bar{I} \circ \bar{q} = \bar{p}_E$ ein Isomorphismus ist, ist $\bar{q}$ auch injektiv, also ein Isomorphismus. Somit ist auch $\bar{I}$ ein Isomorphismus. Nun sind B und rE reduziert, damit ist $\mathrm{Hom}(\cdot,i)$ Linkssatellit der natürlichen Transformation $\bar{I}$ (vgl. Satz 2.8 und 2.7), also auch ein Isomorphismus. Dies zeigt, daß i ein Isomorphismus ist, somit ist $p_E = i \circ q$ surjektiv.

Wir erhalten damit eine exakte Sequenz $0 \to iE \to E \xrightarrow{pE} rE \to 0$. Weil $\bar{p}_E$ ein Isomorphismus ist, ergibt sich eine exakte Funktorsequenz $\mathrm{Hom}(\cdot,rE) \to \mathrm{Ext}^1(\cdot,iE) \to 0$. Berücksichtigt man, daß $\mathrm{Hom}(I,rE) = 0$ für jedes injektive C-Objekt I gilt, daß der Funktor $\mathrm{Ext}^1(\cdot,iE)$ rechtsexakt ist, und daß jedes C-Objekt Unterobjekt eines injektiven C-Objektes ist, so zeigt diese Sequenz, daß $\mathrm{Ext}^1(\cdot,iE) = 0$ gilt. iE ist somit injektiv.

iE ist das größte injektive Unterobjekt von E: Sei (H,j) ein injektives Unterobjekt von E. Weil rE reduziert ist, gilt $p_E \circ j = 0$, das zeigt $H \subset iE$.

Sei nun C eine noethersche, erbliche Kategorie, in der es einen Generator gibt. Ferner seien E und F C-Objekte. Wir erhalten dann die folgenden Korollare von Satz 6.1:

KOROLLAR 1. $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E) \cong \mathrm{Ext}^1(\cdot,F) \Leftrightarrow rE \cong rF$. Insbesondere ist E genau dann injektiv, wenn $rE = 0$ gilt.

KOROLLAR 2. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus
$$\mathrm{HOM}(\mathrm{Ext}^1(\cdot,E),\mathrm{Ext}^1(\cdot,F)) \cong \mathrm{Hom}(rE,rF).$$

BEWEIS. Man wende das Korollar von Satz 2.7 auf die exakt verbundenen Funktorpaare $(\mathrm{Hom}(\cdot,rE),\mathrm{Ext}^1(\cdot,E))$ und $(\mathrm{Hom}(\cdot,rF),\mathrm{Ext}^1(\cdot,F))$ an und beachte $\mathrm{HOM}(\mathrm{Hom}(\cdot,rE),\mathrm{Hom}(\cdot,rF)) \cong \mathrm{Hom}(rE,rF)$ (vgl. 4.2).

Wegen Lemma 6.1 wird jeder Homomorphismus von rE in rF durch einen Homomorphismus von E in F induziert. Wir erhalten damit den folgenden Spezialfall des in der Einleitung erwähnten Resultats von HILTON und REES.

KOROLLAR 3. Jede natürliche Transformation von $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ in $\mathrm{Ext}^1(\cdot,F)$ wird durch einen Morphismus von E in F induziert.

Mit den Bezeichnungen von Lemma 6.1 gilt:

KOROLLAR 4. $u:E \to F$ sei ein C-Morphismus, dann ist $\mathrm{Ext}^1(\cdot,u) = 0$ äquivalent mit $p_F \circ u = 0$, d.h. mit $u(E) \subset iF$.

BEWEIS. u induziert einen Morphismus von rE in rF, dieser ist wegen Korollar 2 genau dann 0, wenn $\mathrm{Ext}^1(\cdot,u) = 0$ ist.

SATZ 6.2. Die Voraussetzungen über C seien die von Satz 6.1. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) C ist noethersch und erblich.

(b) Jedes C-Objekt E besitzt ein größtes injektives Unterobjekt.

BEWEIS. Lemma 6.1 zeigt (a) $\Rightarrow$ (b). Es soll hier jedoch noch ein Beweis dafür gegeben werden, der von den vorhergehenden Überlegungen unabhängig ist: Sei E ein C-Objekt. Weil es in C einen Generator und beliebige direkte Summen gibt, bilden die Unterobjekte von E eine Menge. Man kann daher die Summe

(F,i) der Familie (F_α, i_α) aller injektiven Unterobjekte von E bilden. ((F,i) ist ein Bild des evidenten Morphismus $\oplus F_\alpha \xrightarrow{(i_\alpha)} E$.) Weil C noethersch ist, ist $\oplus F_\alpha$ injektiv. Weil C erblich ist, ist F als Quotient eines injektiven Objektes injektiv. Nach Konstruktion ist klar, daß (F,i) das größte injektive Unterobjekt von E ist.

(b) $\Rightarrow$ (a): Zunächst zeigen wir, daß eine direkte Summe E von injektiven C-Objekten E_α wieder injektiv ist. Sei F das größte injektive Unterobjekt von E, dann gilt $E_\alpha \subset F$ für alle α, somit $F = E$. C ist also noethersch.

Daß C auch erblich ist, folgt aus der Äquivalenz der Aussagen (a) und (c) des folgenden Satzes.

SATZ 6.3 (MATLIS [23]). C sei eine abelsche Kategorie, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jeder Quotient eines injektiven C-Objektes ist injektiv.

(b) Für jedes C-Objekt E gilt: Sind F und G injektive Unterobjekte von E, so ist auch das Unterobjekt $F + G$ injektiv.

(c) Für jedes C-Objekt E gilt: Sind F und G injektive Unterobjekte von E mit $F + G = E$, so ist E injektiv.

Es genügt, die folgende duale Form des Satzes 6.3 zu beweisen:

SATZ 6.4. Für eine abelsche Kategorie C sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jedes Unterobjekt eines projektiven C-Objektes ist projektiv.

(b) Für jedes C-Objekt E gilt: Sind F und G Unterobjekte von E und sind E/F und E/G projektiv, so ist $E/F \cap G$ projektiv.

(c) Für jedes C-Objekt E gilt: Sind F und G Unterobjekte von E mit $F \cap G = 0$ und sind E/F und E/G projektiv, so ist E projektiv.

(Man beachte, daß $F \cap G$ ein Kern des evidenten Morphismus $E \to E/F \times E/G$ ist.)

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b): Es gibt eine exakte Sequenz
$0 \to E/F \cap G \to E/F \times E/G$.

(b) $\Rightarrow$ (c): trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a): Es muß gezeigt werden, daß ein Unterobjekt P' eines projektiven C-Objektes P projektiv ist. Dazu bilden wir eine exakte C-Sequenz $0 \to P' \xrightarrow{u} P \xrightarrow{v} P'' \to 0$ und eine direkte Summe $P \oplus P$ mit Injektionen i_1, i_2 und Projektionen p_1, p_2. Wir erhalten einen Morphismus $(v,v): P \oplus P \to P''$ mit den Komponenten $(v,v) \circ i_1 = v$ und $(v,v) \circ i_2 = v$. Sei (N,j) ein Kern dieses Morphismus. Wir bilden dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{u} & P & \xrightarrow{v} & P'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j} & P \oplus P & \xrightarrow{(v,v)} & P'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dessen Zeilen exakt sind. Die zugehörige exakte Kern-Cokern-Sequenz zeigt, daß die Sequenz $0 \to P' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p_2 \circ j} P \to 0$ exakt ist. Um zu zeigen, daß P' projektiv ist, braucht man also nur noch zu zeigen, daß N projektiv ist. Wir haben schon gesehen, daß $p_2 \circ j: N \to P$ surjektiv ist, genauso ist $p_1 \circ j: N \to P$ surjektiv. Bezeichnen wir die Kerne dieser Morphismen mit N_1 bzw. N_2, so sind N/N_1 und N/N_2 projektiv und $N_1 \cap N_2 = \mathrm{Kern}(j) = 0$. Wegen (c) ist dann N projektiv.

§5'. Der Funktor $\mathrm{Ext}^1(E,\cdot)$ für links-perfekte, rechts-semierbliche Ringe

Die Resultate von §5 und §6 lassen sich unmittelbar dualisieren. Es seien deshalb nur die wichtigsten Ergebnisse formuliert.

THEOREM 5.1'. C sei eine erbliche Kategorie mit beliebigen direkten Produkten, in der ein direktes Produkt von projektiven Objekten stets projektiv ist. V sei ein injektiver Cogenerator von C. $T: C \to M_A$ sei ein kovarianter Funktor mit den Eigenschaften:

(1) T ist halbexakt.

(2) $TV = 0$.

(3) T ist mit beliebigen direkten Produkten vertauschbar.

Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, so daß

$$T \cong \mathrm{Ext}^1_C(E,\cdot) \quad \text{und} \quad S_1 T \cong \mathrm{Hom}_C(E,\cdot).$$

Die Ringe mit der Eigenschaft, daß ein Produkt von projektiven A-Linksmoduln stets wieder projektiv ist, sind von CHASE [8] untersucht worden. Seine Resultate sollen hier kurz angegeben werden.

DEFINITION 5.1'. Ein Ring A heißt links-perfekt, wenn A den folgenden äquivalenten Bedingungen genügt:

(a) Jeder platte A-Linksmodul ist projektiv.

(b) A genügt der Minimalbedingung für Rechtshauptideale.

Die Äquivalenz der Bedingungen (a) und (b), sowie weitere Charakterisierungen der links-perfekten Ringe sind von BASS in [1] bewiesen worden.

Jetzt können wir das Resultat von CHASE formulieren:

SATZ 5.1'. Für einen Ring A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jedes Produkt von projektiven A-Linksmoduln ist projektiv.

(b) Jeder A-Linksmodul der Form A^I ist projektiv.

(c) A ist links-perfekt und rechts-kohärent.

Ein links- oder rechts-artinscher Ring ist links-perfekt und links- bzw. rechts-kohärent. Ferner ist in [8] bewiesen, daß ein kommutativer, perfekter und kohärenter Ring artinsch ist.

Für einen links-perfekten Ring A gilt $lGD(A) = GWD(A)$, weil jeder platte A-Linksmodul projektiv ist. Beachtet man ferner, daß ein Ring A genau dann rechts-semierblich ist, wenn er rechts-kohärent ist und $GWD(A) \leq 1$ gilt (§1), so ergibt sich, daß die Ringe, für die die Kategorie C der Linksmoduln den Voraussetzungen von Theorem 5.1' genügt, gerade die links-perfekten und rechts-semierblichen Ringe sind.

Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß ein kommutativer, semierblicher und perfekter Ring A, der folglich auch erblich ist, halbeinfach ist: A ist nämlich artinsch. Ferner ist ein kommutativer, noetherscher, erblicher Ring A ein direktes Produkt von endlich vielen Dedekindringen A_i (vgl. [13], S.117). Die A_i sind dann artinsche Integritätsbereiche, somit Körper.

Nach einer Bemerkung von CHASE ([8], S.467) gibt es jedoch nichtkommutative, rechts-erbliche und links-perfekte Ringe, die weder rechts- noch links-artinsch sind.

Die Charakterisierung der noetherschen, erblichen Kategorien (Satz 6.2) liefert dann den folgenden Satz:

SATZ 5.2'. Ein Ring A ist genau dann links-perfekt und rechts-semierblich, wenn es zu jedem A-Linksmodul E einen kleinsten Untermodul F gibt, für den E/F projektiv ist.

Man vergleiche diesen Satz mit der Charakterisierung der rechts-semierblichen Ringe durch Satz 9.2 und beachte, daß für einen links-perfekten Ring ein platter A-Linksmodul projektiv ist.

§7. Tensorprodukte in abelschen Kategorien

C sei eine abelsche Kategorie. Es sei daran erinnert ([17], chap.III), daß ein kovarianter Funktor $T:C \to Ab$ repräsentierbar heißt, wenn es ein C-Objekt E und einen Isomorphismus $\sigma:\mathrm{Hom}(E,\cdot) \to T$ gibt. Man sagt dann, daß (E,σ) - oder auch E - den Funktor T repräsentiert.

Ist für einen Ring A E ein A-Rechtsmodul und F ein A-Links-Objekt von C, dann ist $\mathrm{Hom}_C(F,\cdot)$ ein Funktor von C in die Kategorie der A-Rechtsmoduln. Man kann daher den zusammengesetzten Funktor

$$\mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,\cdot)) : C \to Ab$$

bilden.

DEFINITION 7.1. Der Funktor $\mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,\cdot))$ sei repräsentierbar und werde durch (H,σ) repräsentiert. Dann heißt H Tensorprodukt von E und F über A bezüglich σ.

Die Existenz von Tensorprodukten in abelschen Kategorien wird durch den folgenden Satz gesichert:

THEOREM 7.1 (DOLD, PUPPE [10,S.226]). A sei ein Ring, E ein A-Rechtsmodul und F ein A-Linksobjekt einer abelschen Kategorie C. Dann existiert ein Tensorprodukt von E und F, falls eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

(a) E ist von endlicher Darstellung.

(b) In C existieren beliebige direkte Summen der Form $F^{(I)}$.

BEWEIS. Der Beweis werde unter der Voraussetzung (b) geführt. Die notwendigen Modifizierungen für den Fall (a) ergeben sich unmittelbar.

Es gibt eine exakte Sequenz von A-Rechtsmoduln

$$A^{(I)} \xrightarrow{u} A^{(J)} \xrightarrow{v} E \to 0 \tag{1}$$

Dabei wird u durch eine (spaltenendliche) Matrix $(x_{\beta\alpha})$ $(\beta\in J, \alpha\in I)$ beschrieben. Es gilt also, wenn (e_α) $(\alpha\in I)$ bzw. (e'_β) $(\beta\in J)$ die kanonischen Basen von $A^{(I)}$ bzw. $A^{(J)}$ bezeichnen:

$$u(e_\alpha) = \sum_\beta e'_\beta \cdot x_{\beta\alpha} \qquad (\alpha\in I). \tag{2}$$

Wir betrachten dann in C direkte Summen $(i_\alpha, F^{(I)})$ und $(j_\beta, F^{(J)})$

und definieren durch die Formel (φ ist die A-Struktur von F):

(3) $$\bar{u}\circ i_\alpha = \sum j_\beta \circ \varphi(x_{\beta\alpha})$$

einen C-Morphismus $\bar{u}: F^{(I)} \to F^{(J)}$. H werde durch die exakte Sequenz

(4) $$F^{(I)} \xrightarrow{\bar{u}} F^{(J)} \xrightarrow{\bar{v}} H \to 0$$

definiert. H ist dann ein Tensorprodukt von E und F über A.

Dazu ist nachzuweisen: $\mathrm{Hom}_C(H,G) \cong \mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,G))$ für jedes C-Objekt G. Betrachtet man die natürlichen Isomorphismen: $\mathrm{Hom}_A(A^{(I)},\mathrm{Hom}_C(F,G)) \cong \mathrm{Hom}_C(F,G)^I \cong \mathrm{Hom}_C(F^{(I)},G)$, so erhält man aus den Sequenzen (1) und (4) das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(A^{(J)},\mathrm{Hom}_C(F,G)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,\mathrm{Hom}(F,G))} & \mathrm{Hom}_A(A^{(I)},\mathrm{Hom}_C(F,G)) \\ \downarrow r & & s\downarrow \\ \mathrm{Hom}_C(F^{(J)},G) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\bar{u},G)} & \mathrm{Hom}_C(F^{(I)},G) \end{array}$$

mit Isomorphismen r und s. Für $f \in \mathrm{Hom}_A(A^{(J)},\mathrm{Hom}_C(F,G))$ ist der Morphismus $r(f): F^{(I)} \to G$ durch seine Komponenten $r(f)\circ j_\beta = f(e'_\beta)$ definiert. Somit gilt: $(r(f)\circ\bar{u})\circ i_\alpha = r(f)\circ\sum j_\beta\circ\varphi(x_{\beta\alpha}) = \sum f(e'_\beta)\circ\varphi(x_{\beta\alpha}) = \sum f(e'_\beta . x_{\beta\alpha}) = f(\sum e'_\beta . x_{\beta\alpha}) = f(u(e_\alpha)) = s(f\circ u)\circ i_\alpha$. Damit gilt $r(f)\circ\bar{u} = s(f\circ u)$. Das obige Diagramm ist also kommutativ.

Beachtet man, daß der Kern der oberen Zeile $\mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,G))$ und der Kern der unteren Zeile $\mathrm{Hom}_C(H,G)$ ist, so ist damit ein Isomorphismus $t_G: \mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,G)) \to \mathrm{Hom}_C(H,G)$ definiert, der funktoriell in G ist, weil r und s funktoriell in G sind. Das war aber zu zeigen.

Für den Rest dieses Paragraphen wollen wir voraussetzen, daß C eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen ist. In diesem Fall ist für jeden A-Rechtsmodul E und für jedes A-Linksobjekt F der Funktor $\mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,\cdot))$ repräsentierbar. Wir wählen für jedes solche Paar (E,F) ein C-Objekt $E\otimes_A F$ und einen Isomorphismus $\sigma_{EF}: \mathrm{Hom}_C(E\otimes_A F,\cdot) \to \mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,\cdot))$. Man kann dann auf einfache Weise einen Funktor $(E,F) \rightsquigarrow E\otimes_A F$ von $M_A \times {}_AC \to C$ definieren (vgl. [14], chap. I, prop. 10):

Ist $u: E \to E'$ ein Homomorphismus von A-Rechtsmoduln, so induziert u eine natürliche Transformation des Funktors

$\mathrm{Hom}_C(E'\otimes_A F,\cdot) \cong \mathrm{Hom}_A(E',\mathrm{Hom}_C(F,\cdot))$ in den Funktor $\mathrm{Hom}_C(E\otimes_A F,\cdot) \cong$ $= \mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(F,\cdot))$. Diese wird durch einen eindeutig bestimmten Morphismus $u\otimes F: E\otimes_A F \to E'\otimes_A F$ geliefert (4.2). Analoge Betrachtungen gelten für die andere Variable. Damit ist ein Funktor $\otimes_A: M_A \times {}_AC \to C$ definiert, der zu dem Funktor $\mathrm{Hom}_C: {}_AC^{\times} \times C \to M_A$ linksadjungiert ist, und durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

SATZ 7.1. Der Funktor $\otimes_A$ ist rechtsexakt und mit induktiven Limites vertauschbar.

BEWEIS. (a) Für $F\in {}_AC$ und $G\in C$ ist der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_C(\cdot\otimes_A F,G) \cong \mathrm{Hom}_A(\cdot,\mathrm{Hom}_C(F,G))$ von M_A in Ab linksexakt und überführt induktive Limites in projektive Limites (Lemma 2.1). Dies zeigt, daß der Funktor $\cdot\otimes_A F: M_A \to C$ rechtsexakt und mit induktiven Limites vertauschbar ist (Satz 2.2 und Satz 2.1).

(b) Für $E\in M_A$ und $G\in C$ ist der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_C(E\otimes_A \cdot,G) \cong \mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_C(\cdot,G))$ von ${}_AC$ in Ab linksexakt und überführt induktive Limites in projektive Limites. (Man beachte, daß eine Sequenz in ${}_AC$ genau dann exakt ist, wenn sie in C exakt ist, und daß ein induktiver Limes in ${}_AC$ ein induktiver Limes in C ist (Satz 3.1).) Damit ist gezeigt (Satz 2.2 und Satz 2.1), daß der Funktor $E\otimes_A \cdot : {}_AC \to C$ rechtsexakt und mit induktiven Limites vertauschbar ist.

A ist ein (A,A)-Bimodul. Damit ist für jedes A-Linksobjekt E von C auch $A\otimes_A E$ ein A-Linksobjekt von C. Es gilt der Satz:

SATZ 7.2. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $A\otimes_A E \cong E$ von A-Linksobjekten von C.

BEWEIS. Wir haben einen natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen $\mathrm{Hom}_C(A\otimes_A E,F) \cong \mathrm{Hom}_A(A,\mathrm{Hom}_C(E,F)) \cong \mathrm{Hom}_C(E,F)$ für jedes C-Objekt F. Nach Definition der A-Struktur auf $A\otimes_A E$ ist dieser Isomorphismus ein Isomorphismus von A-Rechtsmoduln. Die einleitenden Bemerkungen von §4 zeigen, daß E und $A\otimes_A E$ als A-Linksobjekte von C isomorph sind.

Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung der Funktoren $\cdot\otimes_A E: M_A \to C$, wobei E ein A-Rechtsobjekt von C ist:

THEOREM 7.2 (EILENBERG [12], WATTS [25], DOLD [11]). A sei ein Ring und C eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen. $T: M_A \to C$ sei ein kovarianter, additiver Funktor, dann ist TA ein A-Linksobjekt von C und es gibt einen Morphismus $u: \cdot \otimes_A TA \to T$, so daß $u_A: A \otimes_A TA \to TA$ ein Isomorphismus ist. u ist genau dann ein Isomorphismus, wenn der Funktor T rechtsexakt und mit beliebigen direkten Summen vertauschbar ist.

BEWEIS. Zu jedem A-Rechtsmodul E ist ein Element u_E aus $\mathrm{Hom}_C(E \otimes_A TA, TE)$ anzugeben. Bezeichnet man für $x \in E$ mit $\bar{x}: A \to E$ den durch $\bar{x}(1) = x$ definierten A-Homomorphismus, so liefert die Zuordnung $x \rightsquigarrow T\bar{x}$ einen A-Homomorphismus von E in $\mathrm{Hom}_C(TA, TE)$. Diesem entspricht vermöge $\mathrm{Hom}_C(E \otimes_A TA, TE) \cong \mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_C(TA, TE))$ ein C-Morphismus von $E \otimes_A TA$ in TE, den wir mit u_E bezeichnen. Dadurch ist eine natürliche Transformation $u: \cdot \otimes_A TA \to T$ definiert, nach Satz 7.2 ist u_A ein Isomorphismus. Der Rest folgt aus Satz 2.6.

BEMERKUNG 7.1. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{HOM}(\cdot \otimes_A E, \cdot \otimes_A F) \cong \mathrm{Hom}_A C(E, F),$$

wenn E und F A-Linksobjekte von C sind: Jeder natürlichen Transformation $u: \cdot \otimes_A E \to \cdot \otimes_A F$ entspricht nach Satz 7.2 ein ${}_AC$-Morphismus von E in F. Umgekehrt induziert jeder ${}_AC$-Morphismus von E in F eine natürliche Transformation des Funktors $\cdot \otimes_A E$ in den Funktor $\cdot \otimes_A F$. Die beiden Abbildungen sind zueinander invers.

BEISPIEL 7.1. Der Funktor $\otimes$ braucht nicht balanciert zu sein: Sei A der Ring $Z/(n)$ $(n \neq 0)$ und C die Kategorie der A-Moduln. Der Funktor $\otimes: Ab \times C \to C$ ist dann das gewöhnliche Tensorprodukt über Z, weil für $E \in Ab$, $F \in M_A$ und $G \in M_A$ gilt: $\mathrm{Hom}_Z(E, \mathrm{Hom}_A(F, G)) \cong \mathrm{Hom}_A(E \otimes_Z F, G)$. Jedoch ist der Funktor $\cdot \otimes_Z A : Ab \to C$ nicht exakt, obwohl A in C projektiv ist.

BEISPIEL 7.2. Falls der A-Rechtsmodul E platt ist, braucht der Funktor $E \otimes_A \cdot : {}_AC \to C$ nicht exakt zu sein. Dazu betrachten wir die abelsche Kategorie $C = (Ab)^o$. Für das Tensorprodukt

$\otimes : Ab \times (Ab)^0 \to (Ab)^0$ ergibt sich einfach $E \otimes F = \mathrm{Hom}(E,F)$. Zum Beweis bezeichnen wir den Hom-Funktor in $(Ab)^0$ mit einem Querstrich. Es gilt dann für abelsche Gruppen E, F, G: $\overline{\mathrm{Hom}}(E \otimes F, G) \cong \mathrm{Hom}(E, \overline{\mathrm{Hom}}(F,G)) = \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(G,F)) \cong$ ([4], §4, cor. de la prop. 1) $\cong \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Hom}(E,F)) = \overline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Hom}(E,F),G))$. Daraus folgt die Behauptung.

Man sieht, daß in diesem Fall der Funktor $E \otimes \cdot = \mathrm{Hom}(E,\cdot)$ genau dann exakt ist, wenn E projektiv ist. Falls E platt ist, braucht $E \otimes \cdot$ also nicht exakt zu sein.

Es gilt jedoch der folgende Satz:

SATZ 7.3. C sei eine abelsche Kategorie mit direkten Summen, und E sei ein A-Rechtsmodul.

(a) Falls E projektiv ist, und in C direkte Summen exakt sind, ist der Funktor $E \otimes_A \cdot : {}_AC \to C$ exakt.

(b) Ist C eine Kategorie mit exakten f.induktiven Limites, und ist E platt, so ist der Funktor $E \otimes_A \cdot$ exakt.

BEWEIS. (a) Weil ein projektiver Modul direkter Faktor eines freien A-Moduls ist, genügt es, (a) für freie Moduln zu zeigen. Sei $E = A^{(I)}$. Dann identifiziert sich $E \otimes_A \cdot$ mit dem Funktor $F \rightsquigarrow F^{(I)}$ (Satz 7.1, Satz 7.2). Dieser ist exakt nach Voraussetzung.

(b) folgt aus (a) und dem folgenden Satz.

SATZ 7.4 (GOVOROV [15]). Jeder platte A-Rechtsmodul ist f.induktiver Limes von freien Moduln.

Da die Überlegungen von GOVOROV einen Fehler zu enthalten scheinen, sei hier ein anderer Beweis gegeben. Inzwischen ist der Satz auch von LAZARD [21] bewiesen worden.

Dem eigentlichen Beweis sei ein Lemma vorangeschickt:

LEMMA 7.1. $0 \to N \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} P \to 0$ sei eine exakte Sequenz von A-Linksmoduln, wobei P platt und F frei mit Basis (e_i) $(i \in I)$ ist. Dann gibt es zu jeder endlichen Familie (x_k) $(k \in K)$ von Elementen aus N einen Homomorphismus $g: F \to N$, so daß:

(1) $g(x_k) = x_k$ für alle $k \in K$ und

(2) $g(e_i) = 0$ für fast alle $i \in I$ gilt.

BEWEIS. Weil (e_i) eine Basis von F ist, gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$, und Elemente $a_{ik} \in A$ $(i \in J,\ k \in K)$, so daß $x_k = \sum_i e_i a_{ik}$. Weil P platt ist, gibt es dann ([6], chap.I, §2, ex.24a) Elemente $y_i \in N$ $(i \in J)$ mit $x_k = \sum y_i a_{ik}$. Definiert man g durch $g(e_i) = y_i$ für $i \in J$ und $g(e_i) = 0$ für $i \notin J$, dann hat g die Eigenschaften (1) und (2).

BEWEIS des Satzes 7.4. Sei P ein platter A-Rechtsmodul. Dann gibt es eine exakte Sequenz $0 \to N \to F \xrightarrow{v} P \to 0$ mit freiem Modul F. Wir können noch annehmen, daß N nicht von endlichem Typ ist, indem wir nötigenfalls noch einen geeigneten freien Modul zu N und F addieren. Dann bilden wir die Menge M derjenigen Endomorphismen α des A-Moduls F, für die gilt:

(a) $\alpha(F) \subset N$,

(b) $\alpha(F)$ ist von endlichem Typ,

und führen in M eine Präordnung $\leq$ ein ($\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$) durch $\alpha < \beta \Leftrightarrow \mathrm{Bild}(\alpha) \subsetneq \mathrm{Kern}(1 - \beta)$. Man beachte, daß $\alpha < \beta$ $\alpha \neq \beta$ impliziert. Weil N nicht von endlichem Typ ist, ist $(M, \leq)$ aufsteigend gefiltert (Lemma 7.1). Für $\alpha \in M$ werde $F_\alpha = F$ und für $\alpha < \beta$ werde $u_{\beta\alpha} : F_\alpha \to F_\beta$ durch $u_{\beta\alpha} = 1 - \beta = (1 - \beta)(1 - \alpha)$ definiert. Ferner sei $u_{\alpha\alpha} = 1_F$. Es ist klar, daß $(F_\alpha, u_{\alpha\beta})$ ein induktives System über M ist. Ferner bilden wegen $v = v \circ (1 - \alpha)$ die Morphismen $v_\alpha = v$ ein induktives System surjektiver Morphismen von F_α in P. Die zugehörige Limesabbildung $\varinjlim F_\alpha \to P$ ist daher surjektiv. Sie ist auch injektiv, weil $x \in \mathrm{Kern}(v_\alpha) = \mathrm{Kern}(v) = N$ impliziert: es gibt ein β mit $\alpha \leq \beta$, so daß $(1 - \beta)(x) = 0$ ist. (Lemma 7.1). Der Satz ist bewiesen.

§8. Der Funktor $\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E)$ für rechts-semierbliche Ringe

Sei E ein A-Linksobjekt von C, dann wird der Funktor $\mathrm{Tor}_n^A(\cdot,E) : M_A \longrightarrow C$ als n-te Linksableitung $L_n(\cdot \otimes_A E)$ des Funktors $\cdot \otimes_A E$ definiert. Weil $\cdot \otimes_A E$ rechtsexakt ist, stimmt $\mathrm{Tor}_n^A(\cdot,E)$ mit dem n-ten Linkssatelliten des Funktors $\cdot \otimes_A E$ überein.

Beachtet man, daß der Funktor $\cdot \otimes_A E$ mit induktiven Limites vertauschbar ist (Satz 7.1), so liefern die Sätze von ([7], chap.V,§9), sinngemäß auf abelsche Kategorien übertragen, die folgenden Ergebnisse:

1) $\mathrm{Tor}_n^A(\cdot,E)$ ist mit direkten Summen vertauschbar, falls C eine Kategorie mit exakten direkten Summen ist.

2) $\mathrm{Tor}_n^A(\cdot,E)$ ist mit f.induktiven Limites vertauschbar, falls C eine Kategorie mit exakten f.induktiven Limites ist. In diesem Falle gilt: $\mathrm{Tor}_n^A(P,E) = 0$, falls P ein platter A-Rechtsmodul ist (Satz 7.4). Daraus folgt: Ist F ein A-Rechtsmodul, dessen schwache homologische Dimension $\leq n$ ist, so ist $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(F,E) = 0$.

Wir gehen aus von einen rechts-semierblichen Ring A und einer abelschen Kategorie C mit exakten f.induktiven Limites. Sei $E \in {}_AC$. Wir haben gesehen, daß dann der Funktor $\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E)$ die folgenden Eigenschaften hat: Er ist linksexakt, mit f.induktiven Limites vertauschbar und wird 0 für platte A-Rechtsmoduln. Umgekehrt:

. THEOREM 8.1. A sei ein rechts-semierblicher Ring, C eine abelsche Kategorie mit exakten f.induktiven Limites. $T: M_A \longrightarrow C$ sei ein kovarianter Funktor mit den Eigenschaften:

(1) $TA = 0$.

(2) T ist halbexakt.

(3) T ist mit f.induktiven Limites vertauschbar.

Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C, für das gilt:

$$T \cong \mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E) \quad \text{und} \quad S^1T \cong \cdot \otimes_A E.$$

ZUSATZ. (a) Falls A rechts-erblich ist, genügt es von C vorauszusetzen, daß C beliebige direkte Summen besitzt.

(b) Falls A rechts-erblich und rechts-noethersch ist, kann man die Bedingung (3) zur Bedingung

(3') T ist mit beliebigen direkten Summen vertauschbar.

abschwächen.

BEWEIS von Theorem 8.1. Zunächst folgt aus (1) und (3), daß $TP = 0$ für projektives P. Damit gilt $T = S_1 S^1 T$ (Satz 2.8). Das A-Linksobjekt E sei definiert durch $E = S^1 T(A)$. Dann gibt es (Theorem 7.2) einen Morphismus $u: \cdot \otimes E \to S^1 T$, so daß u_P ein Isomorphismus ist, falls P projektiv von endlichem Typ ist. u induziert einen Morphismus $v: \mathrm{Tor}_1(\cdot, E) \to T$ für die Linkssatelliten. Ich zeige, daß v ein Isomorphismus ist. Sei zunächst F ein A-Rechtsmodul von endlicher Darstellung und $0 \to P' \to P \to F \to 0$ eine exakte Sequenz, wobei P und P' von endlichem Typ sind und P projektiv ist. Dann ist auch P' projektiv, weil A rechts-semierblich ist ([7], chap.I, §6). Wir erhalten dann ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(F,E) & \longrightarrow & P' \otimes E & \longrightarrow & P \otimes E \\ & & {\scriptstyle v_F}\downarrow & & {\scriptstyle u_{P'}}\downarrow & & {\scriptstyle u_P}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & TF & \longrightarrow & TP' & \longrightarrow & TP \end{array}$$

Weil $u_{P'}$ und u_P Isomorphismen sind, ist v_F ein Isomorphismus. Nun ist jeder A-Rechtsmodul f.induktiver Limes von Moduln von endlicher Darstellung ([6], chap.I, §2, ex.10). Weil T und $\mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$ mit f.induktiven Limites vertauschbar sind, ist v ein Isomorphismus.

Bleibt noch zu zeigen, daß $S^1 T \cong \cdot \otimes E$. Die Identifizierung $T = \mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$ liefert ein exakt verbundenes Funktorpaar $(T, \cdot \otimes E)$, somit (Satz 2.7a) eine natürliche Transformation $w: S^1 T \to \cdot \otimes E$, für die $(1_T, w) : (T, S^1 T) \to (T, \cdot \otimes E)$ ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare ist. Andererseits ist $(1_T, u): (T, S^1 T) \to (T, \cdot \otimes E)$ ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare. Es folgt $u \circ w = 1_{(S^1 T)}$. D.h. $S^1 T$ ist direkter Faktor von $\cdot \otimes E$, also rechtsexakt und mit direkte Summen vertauschbar. Nach Satz 2.6 ist dann $u: \cdot \otimes E \to S^1 T$ ein Isomorphismus.

Q.E.D.

BEWEIS vom Zusatz. (a) Falls A rechts-erblich ist, gilt $S^2T = 0$. S^1T ist somit rechtsexakt. Ferner ist S^1T mit direkten Summen vertauschbar (Satz 2.5). Es gibt somit ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes A-Linksobjekt E von C mit $S^1T \cong \cdot \otimes E$, (Theorem 7.2). Es folgt $T \cong S_1(S^1T) \cong \mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$.

(b) Falls A rechts-noethersch ist, folgt aus (3'), daß S^1T mit direkten Summen vertauschbar ist (Satz 2.4). Der weitere Beweis verläuft wie im Teil (a).

BEMERKUNG 8.1. Falls A nicht rechts-noethersch ist, läßt sich die Bedingung (3) von Theorem 8.1 nicht zur Bedingung (3') abschwächen, wie das folgende Beispiel zeigt:

A sei ein Prüferring (ein semi-erblicher Integritätsbereich), der nicht noethersch ist, etwa der Ring aller ganzen algebraischen Zahlen. Dann sei I ein Ideal in A, das nicht von endlichem Typ ist. A/I ist daher nicht von endlicher Darstellung ([6], chap.I, §2, lemme 9). Der Funktor $\mathrm{Hom}(A/I, \cdot)$ genügt den Bedingungen (1), (2) und (3'), ist aber nicht mit f.induktiven Limites vertauschbar (Lemma 2.4). Somit gibt es keinen A-Linksmodul E, für den die Funktoren $\mathrm{Hom}(A/I, \cdot)$ und $\mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$ isomorph sind.

Die folgenden Korollare gelten unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Theorem 8.1.

KOROLLAR 1. Ein Funktor T mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) ist linksexakt.

KOROLLAR 2. Ist F ein A-Linksobjekt von C und der kovariante Funktor $U : M_A \to C$ direkter Faktor des Funktors $\mathrm{Tor}_1(\cdot, F)$, so gibt es ein A-Linksobjekt E von C mit $U \cong \mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$.

Es sei daran erinnert, daß für einen Integritätsbereich A folgendes gilt: Ein A-Modul E ist genau dann Torsionsmodul, wenn $I \otimes_A E = 0$ für jeden injektiven A-Modul I gilt: Ist nämlich I injektiv, so ist I divisibel, es folgt $I \otimes_A E = 0$ für jeden Torsionsmodul E. Umgekehrt ist der Quotientenkörper K von A ein injektiver A-Modul, und aus $K \otimes_A E = 0$ folgt, daß E ein Torsionsmodul ist.

Dies führt zur

DEFINITION 8.1. C sei eine abelsche Kategorie mit beliebigen direkten Summen. A sei ein Ring. Ein A-Linksobjekt E von C heißt Torsionsobjekt, wenn $I \otimes_A E = 0$ für jeden injektiven A-Rechtsmodul I gilt.

KOROLLAR 3. Unter den Voraussetzungen von Theorem 8.1 gibt es zu jedem A-Linksobjekt E von C ein Torsionsobjekt $tE \in {}_AC$ mit $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E) \cong \mathrm{Tor}_1(\cdot,tE)$. tE ist durch diese Eigenschaften bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

KOROLLAR 4. Falls A rechts-noethersch und rechts-erblich und C eine Kategorie mit exakten f.induktiven Limites ist, so folgt aus (1),(2) und (3'), daß T mit f.induktiven Limites vertauschbar ist.

KOROLLAR 5. A sei ein rechts-semierblicher Ring, C eine abelsche Kategorie mit exakten f.induktiven Limites, E und F seien A-Linksobjekte von C. Dann sind die Funktoren $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$ und $\mathrm{Tor}_1(\cdot,F)$ genau dann isomorph, wenn die A-Linksobjekte tE und tF isomorph sind.

KOROLLAR 6. Die Voraussetzungen über C und A seien die von Korollar 5. Dann gilt: Ist $u:E \to F$ ein A-Morphismus, so gilt $\mathrm{Tor}_1(\cdot,u) = 0$ genau dann, wenn $u(tE) = 0$ ist.

Das Korollar vom Satz 2.7 liefert zusammen mit Bemerkung 7.1 das folgende Ergebnis:

KOROLLAR 7. A sei ein rechts-semierblicher Ring, E und F seien A-Linksobjekte von C. Dann gilt:

$$\mathrm{HOM}(\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E),\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,F)) = \mathrm{Hom}(tE,tF)$$

bis auf natürliche Isomorphie.

(Vgl. hierzu Bemerkung 9.2).

§9. Charakterisierungen der rechts-semierblichen Ringe

Es sei daran erinnert (§1), daß ein Ring A genau dann rechts-semierblich ist, wenn er rechts-kohärent ist und $GWD(A) \leq 1$ gilt.

BEMERKUNG 9.1. Falls A ein Integritätsbereich ist, folgt schon aus $GWD(A) \leq 1$, daß A kohärent ist. Dies ist zuerst von HATTORI [18] bewiesen worden. Es sei hier der Beweis von CHASE [8] skizziert: Beachtet man, daß jeder torsionsfreie endlich erzeugbare Modul über einem Integritätsbereich Untermodul eines freien Moduls ist ([7], chap.VII, prop.2.4), so ergibt sich, daß für einen Integritätsbereich mit $GWD(A) \leq 1$ die platten A-Moduln gerade die torsionsfreien A-Moduln sind. Nun ist ein Produkt torsionsfreier A-Moduln wieder torsionsfrei, A ist somit kohärent.

Ist A ein (nicht notwendig kommutativer) lokaler Ring, so folgt ebenfalls aus $GWD(A) \leq 1$, daß A rechts- und links-semierblich ist. Man braucht dazu nur zu beachten, daß ein platter A-Modul von endlichem Typ über einem lokalen Ring frei ist ([6], chap.II, §3, ex.3e).

Jedoch gibt es Ringe mit $GWD(A) \leq 1$, die nicht links-semierblich sind. Man nehme etwa einen Ring A der rechts-semierblich aber nicht links-semierblich ist (CHASE [9]).

Man beachte an dieser Stelle die Analogie zu den erblichen Ringen. Ist A ein Integritätsbereich mit $GD(A) \leq 1$ (ein Dedekindring), so ist A noethersch ([7], chap.VII). Ebenso ist ein kommutativer lokaler Ring mit $GD(A) \leq 1$ noethersch. Und KAPLANSKY [20] hat ein Beispiel eines rechts-erblichen Ringes gegeben, der weder links-erblich noch rechts- oder links-noethersch ist.

Der folgende Satz zeigt, daß Theorem 8.1 die rechts-semierblichen Ringe charakterisiert.

SATZ 9.1. Für einen Ring A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) A ist rechts-semierblich.

(2) Zu jedem A-Linksmodul E gibt es einen Torsionsmodul (s. Definition 8.1) $tE \in {}_AM$ mit $\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E) \cong \mathrm{Tor}_1^A(\cdot,tE)$.

(3) Zu jedem A-Linksmodul E gibt es einen A-Linksmodul tE mit $S^1(\mathrm{Tor}_1^A(\cdot,E)) \cong \cdot \otimes_A tE$.

BEWEIS. Korollar 3 zu Theorem 8.1 zeigt (1) $\Rightarrow$ (2). Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar. Bleibt zu zeigen, daß (1) aus (2) folgt:

Es gibt einen Homomorphismus $i_E : tE \to E$, der einen Isomorphismus $\bar{i}_E : \mathrm{Tor}_1(\cdot,tE) \to \mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$ induziert. Nach Definition des Funktors Tor haben wir nämlich exakt verbundene Funktorpaare $(\mathrm{Tor}_1(\cdot,tE), \cdot \otimes tE)$ und $(\mathrm{Tor}_1(\cdot,E), \cdot \otimes E)$ und nach (2) einen Isomorphismus $u : \mathrm{Tor}_1(\cdot,tE) \to \mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$. Weil $\cdot \otimes tE \cong S^1(\mathrm{Tor}_1(\cdot,tE))$, gibt es einen Morphismus $v : \cdot \otimes tE \to \cdot \otimes E$, so daß (u,v) ein Morphismus exakt verbundener Funktorpaare ist. Nun wird v induziert durch einen A-Homomorphismus $i_E : tE \to E$ (Bemerkung 7.1), es gilt daher $u = \bar{i}_E$. Insbesondere ist daher E platt, wenn $i_E = 0$ ist.

Wir zeigen nun, daß für einen beliebigen Ring A, für jeden Torsionsmodul $E \in {}_AM$ und jeden platten Modul $P \in {}_AM$ $\mathrm{Hom}(E,P) = 0$ gilt. Dazu brauchen wir nur die exakt verbundenen Funktorpaare $(\mathrm{Tor}_1(\cdot,E), \cdot \otimes E)$ und $(\mathrm{Tor}_1(\cdot,P), \cdot \otimes P)$ zu betrachten. Für jedes $g : E \to P$ gilt $\mathrm{Tor}_1(\cdot,g) = 0$, weil noch $\cdot \otimes E \cong S^1(\mathrm{Tor}_1(\cdot,E))$ gilt (Satz 2.8), folgt $\cdot \otimes g = 0$ (Satz 2.7a), somit ist $g = 0$.

Wir beweisen jetzt, daß $\mathrm{GWD}(A) \leq 1$ gilt. Sei E ein platter A-Linksmodul und $0 \to F \xrightarrow{f} E$ eine exakte Sequenz, so gilt $f \circ i_F = 0$, weil tF ein Torsionsmodul ist, also $i_F = 0$, das zeigt, daß F platt ist.

Ferner sei (E_α) eine Familie platter A-Linksmoduln und E das Produkt der E_α mit Projektionen $p_\alpha : E \to E_\alpha$. Es folgt $p_\alpha \circ i_E = 0$ für alle α, somit $i_E = 0$. E ist also platt. Damit ist gezeigt, daß A rechts-kohärent ist.

Q.E.D.

Es bleiben noch die genauen Beziehungen zwischen tE und E zu untersuchen.

Wir wählen zunächst zu $E \in {}_A\mathbf{M}$ einen Torsionsmodul tE und einen A-Homomorphismus $i_E : tE \to E$, der einen Isomorphismus $\bar{i}_E : \mathrm{Tor}_1(\cdot, tE) \to \mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$ induziert. Es gilt dann

LEMMA 9.1. i_E ist injektiv und Cokern(i_E) ist platt.

BEWEIS. Wir betrachten exakte Sequenzen $tE \xrightarrow{u} B \to 0$ und $0 \to B \xrightarrow{v} E$ mit $v \cdot u = i_E$. Weil $\mathrm{Tor}_2 = 0$ ist, ist $\bar{v} : \mathrm{Tor}_1(\cdot, B) \to \mathrm{Tor}_1(\cdot, E)$ injektiv, ferner ist $\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{i}_E$ ein Isomorphismus. Dies zeigt, daß $\bar{v}$ und damit auch $\bar{u}$ ein Isomorphismus ist. Weil tE und B Torsionsmoduln sind, ist u ein Isomorphismus (Korollar zu Satz 2.7 und Bemerkung 7.1). $i_E = v \cdot u$ ist somit injektiv.

Sei nun $0 \to tE \xrightarrow{i_E} E \to E'' \to 0$ eine exakte Sequenz. Diese liefert eine exakte Funktorsequenz $0 \to \mathrm{Tor}_1(\cdot, E'') \to \cdot \otimes tE$, weil $\bar{i}_E$ ein Isomorphismus ist. Weil tE ein Torsionsmodul ist, folgt daraus $\mathrm{Tor}_1(I, E'') = 0$ für jeden injektiven A-Rechtsmodul I. Beachtet man, daß $\mathrm{Tor}_1(\cdot, E'')$ linksexakt ist, und daß jeder A-Modul Untermodul eines injektiven A-Moduls ist, so folgt $\mathrm{Tor}_1(\cdot, E'') = 0$, d.h. E'' ist platt. Das Lemma ist bewiesen.

Wir können somit im folgenden annehmen, daß tE ein Untermodul von E ist, und daß i_E die Inklusion von tE in E ist.

LEMMA 9.2. tE ist der kleinste Untermodul von E, für den E/tE platt ist.

BEWEIS. Wir haben schon gesehen, daß E/tE platt ist, und daß $\mathrm{Hom}(tE, P) = 0$ für jeden platten A-Linksmodul P gilt. Sei nun F ein Untermodul von E und E/F platt, dann ist die Komposition $tE \to E \to E/F$ gleich 0, d.h. $tE \subset F$.

Lemma 9.2 zeigt, daß für einen Prüferring A tE mit dem gewöhnlichen Torsionsuntermodul von E übereinstimmt, der von den Torsionselementen von E gebildet wird.

BEMERKUNG 9.2. A sei ein rechts-semierblicher Ring und E ein A-Linksmodul. Berücksichtigt man, daß $t(tF) = tF$ für jeden A-Linksmodul F gilt, so ergibt sich, daß tE genau dann direkter Summand von E ist, wenn für jeden A-Linksmodul F jeder

Morphismus von tE in tF durch einen Morphismus von E in F induziert wird. Korollar 7 zu Theorem 8.1 zeigt dann, daß dies genau dann gilt, wenn jede natürliche Transformation $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(\cdot,F)$ (für jedes $F \in {}_A\mathrm{M}$) durch einen Morphismus von E in F induziert wird. Ist also A ein links-perfekter rechts-semierblicher Ring (§5'), so ist tE stets direkter Summand von E, weil jeder platte A-Linksmodul projektiv ist. Somit wird in diesem Fall jede natürliche Transformation $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E) \to \mathrm{Tor}_1(\cdot,F)$ durch einen A-Homomorphismus von E in F geliefert.

Andererseits gibt es einen Z-Modul E, so daß tE nicht direkter Summand von E ist ([5], chap.VII, §2, ex.7e). Folglich gibt es keinen Homomorphismus $E \to tE$, der den zu I_E inversen Isomorphismus $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E) \to \mathrm{Tor}_1(\cdot,tE)$ induziert.

SATZ 9.2. Für einen Ring A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) A ist rechts-semierblich.

(b) Zu jedem A-Linksmodul E gibt es einen kleinsten Untermodul F, für den E/F platt ist.

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b) ist Lemma 9.2. Es soll hier jedoch noch ein Beweis gegeben werden, der von den vorhergehenden Überlegungen unabhängig ist: Sei E ein A-Linksmodul und F der Durchschnitt aller Untermoduln E' von E, für die E/E' platt ist. Dann gibt es eine exakte Sequenz $0 \to F \to E \to \prod E/E'$ (wobei das Produkt über diejenigen Untermoduln E' von E erstreckt wird, für die E/E' platt ist). Nun ist A rechts-kohärent, damit ist $\prod E/E'$ platt, und E/F ist platt als Untermodul eines platten Moduls.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ich zeige zunächst, daß ein Produkt E von platten A-Linksmoduln E_α wieder platt ist. Sei $F_\beta = \coprod_{\alpha \neq \beta} E_\alpha$, so ist $E/F_\beta \cong E_\beta$ platt. Wegen $\bigcap_\beta F_\beta = 0$ ist E platt. A ist somit rechts-kohärent.

Daß $\mathrm{GWD}(A) \leq 1$ ist, folgt aus der Äquivalenz der Aussagen (a) und (c) des folgenden Satzes:

SATZ 9.3. Für einen Ring A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\mathrm{GWD}(A) \leq 1$.

(b) Für jeden A-Linksmodul E gilt: Sind F,G Untermoduln von E und sind E/F und E/G platt, so ist auch E/F∩G platt.

(c) Für jeden A-Linksmodul E gilt: Sind F,G Untermoduln von E mit F∩G = 0 und sind E/F und E/G platt, so ist E platt.

BEWEIS. Im Beweis von Satz 6.4 ersetze man "projektives C-Objekt" durch "platter A-Linksmodul".

LEMMA 9.3. Falls A rechts- und links-semierblich ist, gilt: Ist E ein A-Linksmodul von endlicher Darstellung, so ist tE direkter Faktor in E und E/tE ist projektiv.

BEWEIS. Weil A rechts-semierblich ist, ist tE definiert. Weil A auch links-semierblich ist und E von endlicher Darstellung ist, gibt es eine exakte Sequenz $0 \to P' \to P \to E \to 0$, wobei P,P' projektiv und von endlichem Typ sind. Wir erhalten daraus eine exakte Funktorsequenz $0 \to \mathrm{Tor}_1(\cdot,E) \to \cdot \otimes P' \to \cdot \otimes P$. Es folgt, daß $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$ mit direkten Produkten vertauschbar ist, weil dies für die beiden anderen Funktoren gilt. Da $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$ noch linksexakt ist, existiert nach Theorem 4.1 ein A-Rechtsmodul F mit $\mathrm{Hom}(F,\cdot) \cong \mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$. F ist von endlicher Darstellung nach Lemma 2.4. Wir erhalten damit $\cdot \otimes tE \cong S^1(\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)) \cong \mathrm{Ext}^1(F,\cdot)$. Somit $tE \cong \mathrm{Ext}^1(F,A)$. Weil F von endlicher Darstellung und A rechts-semierblich ist, gibt es eine exakte Sequenz $0 \to Q' \to Q \to F \to 0$, wobei Q und Q' projektiv und von endlichem Typ sind. Dies zeigt, daß $tE \cong \mathrm{Ext}^1(F,A)$ von endlichem Typ ist. E/tE ist daher von endlicher Darstellung und platt, somit projektiv. Also ist tE direkter Faktor von E.

Dieses Ergebnis läßt sich dazu verwenden, für einen rechts- und links-semierblichen Ring A und für ein endlich erzeugbares A-Linksideal I Aussagen über t(A/I) zu machen.

Zunächst ist $t(A/I) = J/I$ für ein geeignetes Linksideal $J \supset I$ von A. Und $(A/I)/(J/I) = A/J$ ist projektiv, J somit direkter Faktor von A, d.h. $J = Ae$ für ein Idempotent e von A.

Man erhält also für ein gegebenes endlich erzeugbares A-Linksideal I das Ideal J als kleinstes von einem Idempotent erzeugtes Oberideal von I.

Insbesondere gilt: Ist A ein Ring ohne nichttriviale Idempotente (etwa ein Integritätsbereich oder ein lokaler Ring), so gilt für $I \neq 0$ und I von endlichem Typ: $t(A/I) = A/I$.

LITERATUR

1. H. Bass: Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466 - 488.

2. H. Bass: Injective dimension in noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 18 - 29.

3. N. Bourbaki: Théorie des ensembles, chap.3, Paris 1956.

4. N. Bourbaki: Algèbre, chap. 2, Paris 1962.

5. N. Bourbaki: Algèbre, chap. 6, 7, Paris 1952.

6. N. Bourbaki: Algèbre Commutativ , chap.1,2, Paris 1962.

7. H. Cartan and S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton University Press 1956.

8. S. Chase: Direct products of modules, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457 - 473.

9. S. Chase: A generalization of the ring of triangular matrices, Nagoya Math. J. 18 (1961), 13 - 25.

10. A. Dold und D. Puppe: Homologie nicht-additiver Funktoren, Ann. Inst. Fourier 11 (1961), 201 - 312.

11. A. Dold: Universelle Koeffizienten, Math. Z. 80 (1962), 63 - 88.

12. S. Eilenberg: Abstract description of some basic functors, J. Indian Math. Soc. 24 (1960), 231 - 234.

13. S. Endo: On semi-hereditary rings, J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 109 - 119.

14. P. Gabriel: Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323 - 448.

15. V. E. Govorov: Rings over which flat modules are free, Soviet Math. 3 (1962), 836 - 838.

16. A. Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. 9 (1957), 119 - 221.

17. A. Grothendieck: Eléments de géométrie algébrique I, III Paris 1960, Paris 1961.

18. A. Hattori: On Prüfer rings. J. Math. Soc. Japan 9 (1957), 381 - 385.

19. P. J. Hilton and D. Rees: Natural maps of extension functors and a theorem of R. G. Swan, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 489 - 502.

20. I. Kaplansky: On the dimension of modules and algebras X, A right hereditary ring which is not left hereditary, Nagoya Math. J. 13 (1958), 85 - 88

21. D. Lazard: Sur les modules plats, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (1964), 6313 - 6316.

22. S. Mac Lane: Homology, Berlin 1963.

23. E. Matlis: Injective modules over noetherian rings, Pac. J. Math. 8 (1958), 511 - 528.

24. F. Oort: A note on natural maps of higher extension functors. Proc. Camb. Phil. Soc. 59 (1963), 283 - 286.

25. C. E. Watts: Intrinsic characterisations of some additive functors, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 5 - 8.

LEBENSLAUF

Ich, Helmut Lenzing, wurde am 16.4.1939 in Beuthen als Sohn des jetzigen Justizangestellten Ernst Lenzing und seiner Ehefrau Maria-Elisabeth, geb. Schlüter geboren. Nach der Vertreibung im Januar 1945 wohnte ich in Hilter (Landkreis Osnabrück), wo ich ab Herbst 1945 die Volksschule besuchte. Ab 1950 besuchte ich die Mittelschule in Dissen, ab 1954 das Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium in Osnabrück, wo ich 1959 die Reifeprüfung ablegte.

Im SS 1959 begann ich mein Studium an der Freien Universität Berlin, zunächst im Hauptfach Physik, dann im Hauptfach Mathematik und bestand hier 1961 die Diplomvorprüfung. 1960 bin ich in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen worden.

Ich hörte bei Prof. Grotemeyer Vorlesungen über Topologie, Garbentheorie und Homologische Algebra, wodurch ich zu der vorliegenden Arbeit angeregt wurde. Ferner hörte ich bei Prof. Pachale Vorlesungen über verschiedene Gegenstände der Funktionalanalysis sowie bei Prof. Stöhr Vorlesungen über Algebraische Zahlentheorie.